

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler  
Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

BERECKE, E.: Drei Beispiele aus der Elektroservotechnik (Zusammenfassender Bericht) . . . . .	488
ERICKSEN, J. L.: Deformations Possible in Every Isotropic, Incompressible, Perfectly Elastic Body . . . . .	488
GARY, M.: Die Konstruktion der mittleren Linie bei Oberflächenprofilen und einige Zusammenhänge zwischen den zur Kennzeichnung von Oberflächen benutzten Grössen . . . . .	490
RUTISHAUSER, H.: Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus . . . . .	496

## Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

BALDINGER, E., und NICOLET, M.: Ein Impulsgenerator mit Sekundäremissionsröhren . . . . .	508
HENRICI, P.: On Rotational Viscous Flow Through a Tube . . . . .	511

## Varia - Miscellaneous - Divers

Internationaler Mathematikerkongress in Amsterdam, September 1954 . . . . .	516
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	517

ZAMP	Vol. V	Fasc. 6	Pag. 443-518	15. 11. 54
------	--------	---------	--------------	------------

Verlag Birkhäuser Basel, Schweiz

UNIVERSITY OF MICHIGAN  
FEB 16 '55

1  
37

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurze Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten von Fr. 20.-* pro Seite und zusätzlich von der 25. Seite an einen solchen von Fr. 35.- pro Seite zu entrichten.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contribution to the periodical should be addressed to the *Editor*. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution* of Fr. 20.- per page over and above these 16 pages. For articles of more than 24 pages, the contribution is Fr. 35.- per page exceeding 24 pages.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langue française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution de Fr. 20.-* doit être payée par page supplémentaire. Dès qu'il s'agit de 25 pages ou plus, la contribution est de Fr. 35.- par page.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 38.-, Ausland Fr. 48.-, Einzelnummer Fr. 10.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 38.-, foreign Fr. 48.-, single copy Fr. 10.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 38.-, étranger Fr. 48.-, le numéro Fr. 10.-

Postabonnement — Post-Office Subscription — Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg  
Italien

Dänemark  
Marokko

Deutschland  
Norwegen

Finnland  
Portugal

Holland  
Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces:  $\frac{1}{2}$  Seite/page: Fr. 165.-,  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr. 88.-,  $\frac{1}{8}$  Seite/page: Fr. 50

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1954 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland



## Drei Beispiele aus der Elektroservotechnik

Zusammenfassender Bericht

Von EDUARD GERECKE, Zürich<sup>1)</sup>

### Einleitung

In einer früheren Arbeit wurde in dieser Zeitschrift die theoretische Seite der Berechnung von Regulierungen<sup>2)</sup> behandelt. Die drei folgenden elementaren Beispiele sind charakteristisch für die Elektroservotechnik. Sie zeigen zunächst das statische Verhalten des geschlossenen Regelkreises in graphischer Darstellung. Aus den Kennlinien der einzelnen Teile, wie Generatoren, Motoren, Apparate und Verstärker, wird die äussere Kennlinie des geschlossenen Regelkreises mit Proportionalregler konstruiert.

Heute interessiert sich die Technik immer mehr für das dynamische Verhalten gekoppelter Systeme, und zwar nicht nur hinsichtlich der Stabilität, sondern vornehmlich wegen der Möglichkeit des Baues von genau und rasch arbeitenden, also mit geringen Zeitverzögerungen behafteten Servomechanismen.

Es wird gezeigt, wie in vielen Fällen durch das Schliessen des Regelkreises die Zeitkonstanten reduziert werden und welches offensichtlich der Grund hierfür ist. An dem Zahlenbeispiel eines grossen Walzmotors werden die verschiedenen Stabilitätskriterien besprochen. Die Arbeit bedient sich vornehmlich graphischer Methoden, da diese dem Ingenieur bei der Projektierung und Dimensionierung der Einzelteile wertvolle Dienste leisten. Seine Aufgabe ist es, mit konstruktivem Geschick technisch einfache und wirtschaftlich tragbare Lösungen zu finden. Die beschriebenen Methoden lassen auch die Behandlung komplizierter Probleme zu, wie zum Beispiel das dynamische Verhalten von grossen Drehstromgeneratoren mit den zugehörigen Turbinen und Fernleitungen. Treten jedoch nichtlineare Glieder auf, so sind solche Systeme heute einer mathematischen Behandlung noch nicht zugänglich.

Es wurde durchgehend die vom Schweizerischen Elektrotechnischen Verein empfohlene Schreibweise verwendet<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Institut für Allgemeine Elektrotechnik der ETH.

<sup>2)</sup> HEINRICH H. WEBER, *Methodik der Berechnung von Regulierungen*, ZAMP 4, 233 (1953).

<sup>3)</sup> *Regeln und Leitsätze für Buchstabensymbole und Zeichen*, Publikation Nr. 192df, 2. Auflage des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV) (Zürich 1953).

### A. Fremderregte Gleichstrommaschine

Als erstes Beispiel soll die graphische Behandlung der Regelung der Klemmenspannung  $U$  eines mit konstanter Drehzahl  $n$  laufenden fremderregten Gleichstromgenerators nach Figur 1 besprochen werden. Figur 2 zeigt die Verhältnisse für den offenen und geschlossenen Regelkreis im stationären Zustand. Die äusseren Kennlinien  $AB$  des offenen Kreises ( $k = 0$ ) sind bei Vernachlässigung der Ankerrückwirkung parallele Gerade mit einer Neigung entsprechend dem «Quellenwiderstand»  $R_q$  des Ankerkreises. Im geschlossenen Regelkreis wird die Klemmenspannung  $U$  über ein Potentiometer mit dem Teilverhältnis  $k$  dem Verstärker mit der Übertragungsfunktion  $K_v g(p)$  in Gegenschaltung zur frei wählbaren Vergleichsspannung  $U_0$  zugeführt. Im Leerlauf ( $I = 0$ ) führt das graphisch in Figur 2 vom Punkt  $A$  zum Punkt  $A_1$  auf der «Potentiometergeraden  $K_1$ » und dann zum Punkt  $A_2$  auf der statischen «Verstärkerkennlinie  $K_2$ », bei welcher vertikal dessen Eingangsspannung  $E = U_0 - kU$  und horizontal dessen Ausgangsstrom  $I_1$  eingetragen sind. Zum Erregerstrom  $I_1$  des Generators kann die zugehörige Quellenspannung  $U_q$  der «Leerlaufkennlinie  $K_3$ » im Punkt  $A_3$  entnommen werden. Der Polygonzug  $AA_1A_2A_3A$  stellt daher die elektrischen Verhältnisse im geschlossenen Regelkreis bei Leerlauf dar. Bei Belastung im offenen Regelkreis durch den Strom  $I$  sinkt die Klemmenspannung  $U$  längs der Geraden  $AB$  laut

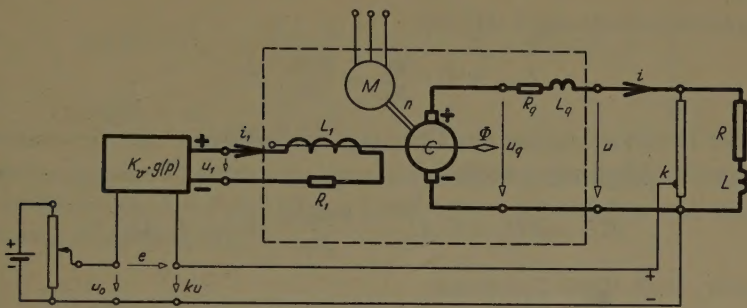
$$U = U_q - R_q I \quad (1)$$

um den Betrag  $AB_0 = \Delta U = R_q I$  ab.

Wie verändert sich nun diese Kennlinie im geschlossenen Regelkreis? Lässt man den Spannungsabfall  $\Delta U$  zu, so sinkt die Gegenspannung  $kU$  am Verstärker um  $(k \Delta U)$  (Punkte  $B_1$  und  $B_2$ ). Demzufolge tritt ein um  $\Delta I_1$  grösserer Erregerstrom auf, der eine grössere Quellenspannung ( $U_q + \Delta U_q$ ) entsprechend den Punkten  $B_3$  und  $B_4$  hervorruft. Damit stellt sich ein viel grösserer Belastungsstrom  $I^*$  (Punkt  $B^*$ ) ein, wobei unter Vernachlässigung der Ankerrückwirkung  $B_4B^* \parallel AB$  ist.

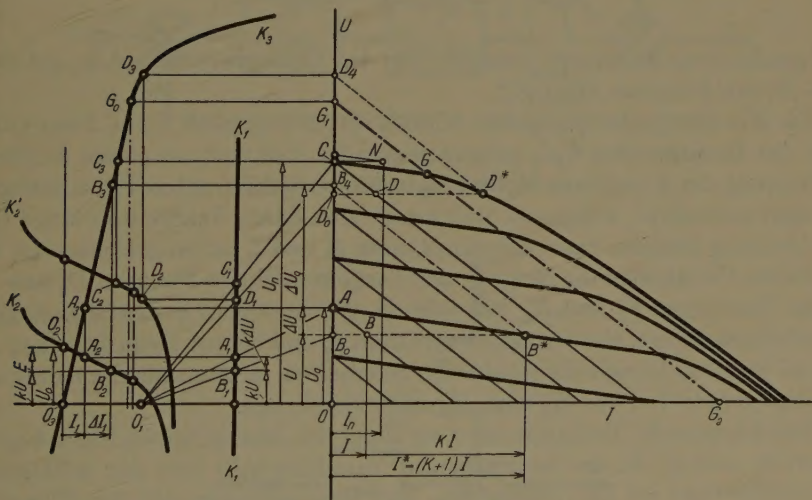
Durch das Schliessen des Regelkreises geht also die ursprüngliche Kennlinie  $AB$  in die viel flachere Gerade  $AB^*$  über, wie wenn der Quellenwiderstand  $R_q$  kleiner geworden wäre. Die entsprechende Konstruktion für den höhergelegten Leerlaufpunkt  $C$  ergibt zufolge der Krümmung der Kennlinien  $K_2$  und  $K_3$  eine im Vergleich zu  $AB^*$  steilere Kennlinie  $CD^*$ . Auf ein Absinken der Klemmenspannung  $U$  um  $AB_0 = \Delta U$  reagiert also der Regelkreis durch eine Erhöhung der Quellenspannung  $U_q$  um  $\Delta U_q$ ; Figur 3 ist typisch für den «Proportionalregler». Die Übertragungsfunktion  $K_v g(p)$  des Verstärkers habe für  $p = 0$  den Wert  $K_v$ . Der Erregerstrom  $I_1$  in der Feldwicklung mit dem Widerstand  $R_1$ , der Induktivität  $L_1$  und der Zeitkonstanten  $T_1 = L_1/R_1$  wächst infolge





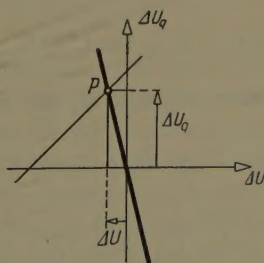
Figur 1

Gleichstromgenerator mit gegengekoppeltem Regelkreis.



Figur 2

Aussere Kennlinien des Generators bei offenem und geschlossenem Regelkreis.



Figur 3

Fehler und Quellenspannungsänderung beim Proportionalregler.

der Spannungsabsenkung  $k \Delta U$  um

$$I_1 = k \Delta U \frac{K_v}{R_1} = \frac{k K_v}{R_1} \Delta U,$$

was unter Berücksichtigung der Übertragungsfunktion  $C$  des Generators eine Erhöhung der Quellenspannung um

$$\Delta U_q = A B_4 = C \Delta I_1 = \frac{k K_v C}{R_1} \Delta U = K \Delta U$$

hervorrufen. Nach Figur 2 ist damit:

$$B_0 B_4 = U + \Delta U_q = (1 + K) \Delta U, \quad B_0 A = \Delta U = R_q I = R_q^* I^*.$$

$$R_q^* = \frac{R_q}{1 + K}, \quad K = \frac{k K_v C}{R_1}. \quad (2)$$

Der geschlossene Regelkreis reduziert also den Quellenwiderstand  $R_q$  auf einen  $(1 + K)$ -mal kleineren Wert  $R_q^*$ .

Die Kennlinien des geregelten Kreises setzen sich nach Figur 2 aus einem links der Grenzgeraden  $G_1 G_2$  gelegenen geraden Teil und aus einem durch die Krümmung der Kennlinien  $K_2$  und  $K_3$  bedingten gekrümmten Teil zusammen. Sie sind zueinander kongruent und lassen sich durch Translation längs  $G_1 G_2$  zur Deckung bringen. Statt der Konstanten  $K$  und  $C$  ist im gekrümmten Teil für kleine Variationen die Neigung der Tangenten in den Punkten  $D_2$  bzw.  $D_3$  an die Kennlinien  $K_2$  und  $K_3$  massgebend. Wünscht man in dem sogenannten Nennbetriebsgebiet, also bis zum Nennstrom  $I_n$  und bis zur Nennspannung  $U_n$ , überall parallele Gerade als Kennlinien zu erhalten, so lässt sich der hierfür notwendige gerade Teil von  $K_2$  bzw.  $K_3$  sofort abgrenzen.

Das dynamische Verhalten kann an Hand der Blockschemas Figur 4 und 5 beurteilt werden. Zu der unabhängigen Variablen  $u_0(t)$  tritt der willkürliche Belastungsstrom  $i(t)$  als «Störgrösse». Der Momentanwert  $u(t)$  der Klemmenspannung kann zum Beispiel als Überlagerung einer Exponentialschwingung mit der komplexen Frequenz  $p = \sigma + j\omega$  ( $j^2 = -1$ ) über einen konstanten Wert  $U$  aufgefasst werden:

$$u(t) = U + \operatorname{Re}(\bar{U} e^{pt}). \quad (3)$$

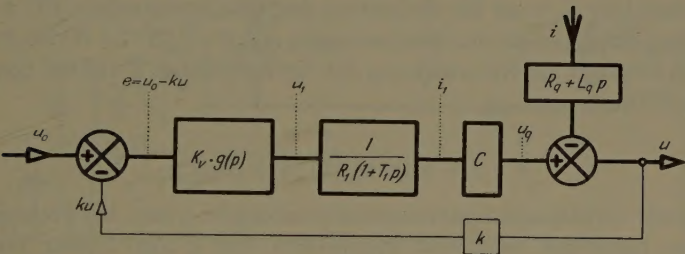
Im linearen Teil der Kennlinien  $K_2$  und  $K_3$  gilt dann nach Figur 5 für den Zeiger  $\bar{U}$ :

$$\bar{U} = G_1(p) \bar{U}_0 - G_2(p) \bar{I}, \quad (4)$$

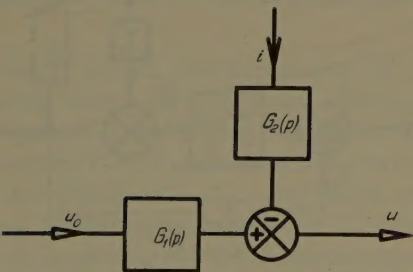
$$\left. \begin{aligned} G_1(p) &= \frac{K}{k} \cdot \frac{g(p)}{1 + K g(p)} \cdot \frac{1}{1 + T_1/[1 + K g(p)]} p, \\ G_2(p) &= \frac{K}{k} \cdot \frac{g(p)}{\bar{z}_1 + K g(p)}, \quad \bar{z}_1 = 1 + T_1 p, \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

$$\left. \begin{aligned} G_2(p) &= \bar{Z}_a \frac{1 + T_1 p}{1 + K g(p) + T_1 p}, \quad \bar{Z}_a = R_a + L_a p, \\ G_2(p) &= \bar{Z}_a \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1 + K g(p)}. \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

$R_a$  beziehungsweise  $\bar{Z}_a$  ist das die Spannungsregelung bedingende Glied. Obige Formeln führen für  $p = 0$  und  $g(0) = 1$  zum bereits behandelten statischen Verhalten nach Gleichung (2).



Figur 4  
Blockschema des geregelten Generators.



Figur 5  
Resultierendes Blockschema.

Das dynamische Verhalten kann für den Fall  $g(p) = 1$ , wenn also der Verstärker viel rascher arbeitet als die Gleichstrommaschine, gut übersehen werden. Für Variationen  $\bar{U}_0$  der Bezugsspannung geht die relativ grosse Zeitkonstante  $T_1$  des Feldes nach (4a) auf einen  $(1 + K)$ -mal kleineren Wert zurück. Dasselbe tritt für die Quellenimpedanz  $\bar{Z}_a$  bei Stromvariationen  $\bar{I}$  ein, jedoch nur für ganz kleine Werte von  $p$ ; für grosse nähert sich der Bruch rechts im Ausdruck für  $G_2(p)$  der Einheit. Die geregelte Maschine reagiert also rascher auf Veränderungen als die ungeregelte. Eine plötzliche Belastungsschwankung kann durch eine sprungweise Variation der komplexen Impedanz  $\bar{Z}$  erfasst



werden. Mit der reziproken komplexen Übertragungsfunktion

$$h_v(p) = \frac{1}{g(p)} \quad (4c)$$

des Verstärkers wird

$$G_1(p) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + h_v(p) \bar{z}_1/K}, \quad (4d)$$

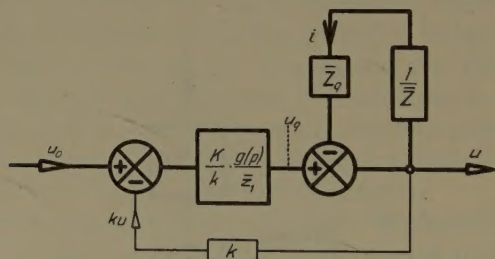
$$G_2(p) = \frac{\bar{z}_q}{K} \cdot \frac{h_v(p) \bar{z}_1}{1 + h_v(p) \bar{z}_1/K}. \quad (4e)$$

Der Ausdruck für  $G_2$  zeigt die Reduktion der Quellenimpedanz für  $p = 0$ , der Term rechts gibt allgemein den Frequenzgang von  $p=0$  ( $K:1+K$ ) bis  $p=\infty(K)$ .

Figur 6 erläutert die Rückwirkung der Netzimpedanz  $\bar{Z}$  auf die Spannungshaltung und führt zu

$$\bar{U} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + h_v(p) (\bar{z}_1/K) [1 + (Z_q/Z)]} \bar{U}_0. \quad (4f)$$

Die technisch wichtigsten Spannungsschwankungen treten bei konstantem  $U_0$  infolge von beliebigen zeitlichen Variationen von  $\bar{Z}$  auf. Leider können die dadurch entstehenden nichtlinearen Differentialgleichungen durch die Laplace-Transformation nicht erfasst werden.



Figur 6

Blockschema mit Belastungskreis.

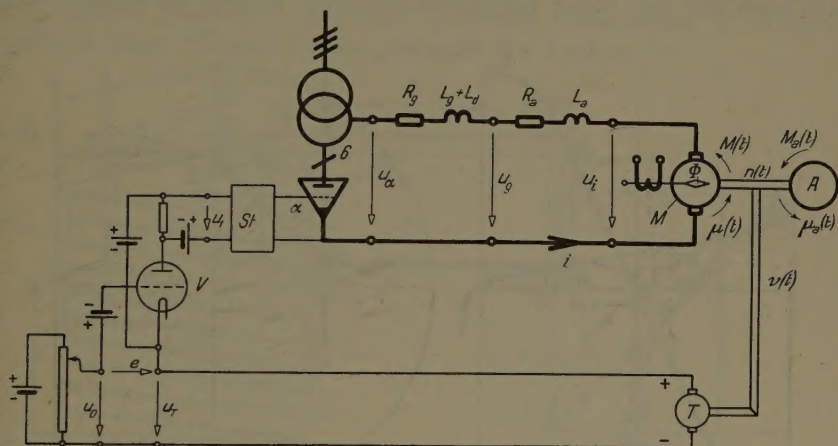
Für  $g(p) = 1$  kann der Verstärkungsgrad  $K$  beliebig hoch gewählt werden, ohne dass Instabilität auftritt. Hat jedoch der Verstärker im Vergleich zur Maschine eine wesentliche Zeitverzögerung, wie solche zum Beispiel bei magnetischen Verstärkern auftreten, so müssen zur Beurteilung des maximal zulässigen Wertes von  $K$  die Stabilitätskriterien herangezogen werden.

Regler für konstanten Strom lassen sich analog graphisch und dynamisch behandeln. Die Quellenimpedanz wird dabei  $(1 + K)$ -mal grösser, die äusseren Kennlinien des geschlossenen Kreises fallen steil ab. Analog lassen sich Kaskadenschaltungen von mehreren Maschinen oder Verstärkern und von vielen Arten von Proportionalreglern unter Benützung ihrer Kennlinien graphisch behandeln.



## B. Antrieb für konstante Drehzahl

Die Kontrolle der Drehzahl  $n$  des Motors  $M$  und der Arbeitsmaschine  $A$  geschieht nach Figur 7 durch einen gesteuerten Stromrichter und mittels des



Figur 7

Gesteuerter Stromrichterantrieb mit Tachometerdynamo und Verstärkerröhre.

Tachometergenerators  $T$ , dessen Gleichspannung  $U_T$  mit dem einstellbaren Sollwert  $U_0$  verglichen wird. Die folgenden Überlegungen gelten analog, wenn statt des Stromrichters ein Gleichstromgenerator verwendet wird. Zunächst sollen die statischen Verhältnisse ähnlich wie im ersten Beispiel graphisch behandelt werden. Der Fehler ( $E = U_0 - U_T$ ) wirkt auf das Gitter der Verstärkerröhre  $V$ , deren Ausgangsgleichspannung  $U_1$  dem Gittersteuergerät  $St$  zugeführt wird. Die Veränderung der Leerlaufgleichspannung  $U_\alpha$  am gesteuerten Stromrichter wird in bekannter Weise durch zeitliche Verzögerung des Zündensatzes der einzelnen Anoden gegenüber dem nichtgesteuerten Zustand erreicht. Beim  $m$ -Phasen-Gleichrichter, zum Beispiel  $m = 6$ , sinkt dann die Leerlaufspannung  $U_\alpha$  gegenüber ihrem Maximalwert  $U_m$  ab laut

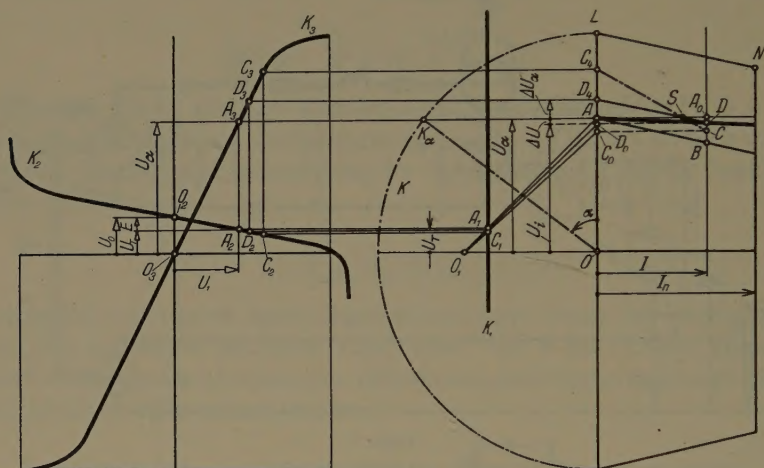
$$U_\alpha = U_m \cos \alpha \quad (5)$$

mit  $\alpha$  als Zündverzögerungswinkel.

Die äusseren Kennlinien des gesteuerten Stromrichters (Figur 8) sind parallele Gerade ähnlich denjenigen einer fremderregten Gleichstrommaschine (Figur 2). Das Steuergerät  $St$  erzeugt nun einen um so grösseren Steuerwinkel  $\alpha$ , je negativer die Eingangsspannung  $U_1$  ist. Die Kennlinie  $K_3$  in Figur 8 stellt  $U_\alpha$  in Funktion von  $U_1$  dar. Aus dem Kreis  $K$  mit dem Radius  $U_m$  lässt sich für

jeden Wert  $U_\alpha$  der Steuerwinkel  $\alpha$  sowohl für Gleichrichter- ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ) wie auch für Wechselrichterbetrieb ( $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) konstruieren.

Der Stromrichter weist einen ohmschen ( $R_g$ ) und einen induktiven, durch die Wirkung der Streuung  $L_g$  während den Überlappungszeiten bedingten Spannungsabfall auf. Unter Berücksichtigung des Ankerwiderstandes  $R_a$  er-



Figur 8

Statische Kennlinien des Stromrichterantriebes.

geben sich daher für den Mittelwert  $U_i$  der induzierten Ankerspannung laut

$$U_i = U_\alpha - \left( R_g + R_a + \frac{2\pi}{m} f L_g \right) I = U_\alpha - R I \quad (6)$$

parallele Gerade (Figur 8,  $AB \parallel LN$ ) als Kennlinien ( $f$  = Frequenz). Bei vielen Problemen der Servotechnik erweist sich die Einführung von bezogenen Größen, also von homogenen Koordinaten, als sehr zweckmässig. Als Bezugsgrößen werden die «Nennwerte» gewählt, also der Nennwert der Drehzahl  $n_n$ , des Stromes  $I_n$ , des Drehmomentes  $M_n$  des Motors und die maximale Gleichspannung  $U_m$ . Die bezogenen Werte lauten:

$$\mu = \frac{M}{M_n}, \quad \mu_a = \frac{M_a}{M_n}, \quad \nu = \frac{n}{n_n}, \quad \nu_\alpha = \frac{U_\alpha}{U_m}, \quad (7)$$

wobei  $M_a$  das Gegendrehmoment der Arbeitsmaschine bedeutet. Für die vom konstanten Feldfluss  $\Phi$  induzierte Ankerspannung  $U_i$  und für das Drehmoment  $M$  gelten bei Vernachlässigung der Ankerrückwirkung:

$$U_i = C \omega, \quad U_m = C \omega_n, \quad M = C i, \quad M_n = C I_n, \quad (8)$$

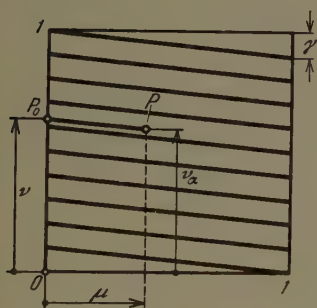


und daher ist:

$$v = \frac{U_i}{U_m} = \frac{n}{n_n} = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \mu = \frac{M}{M_n} = \frac{i}{I_n}. \quad (8a)$$

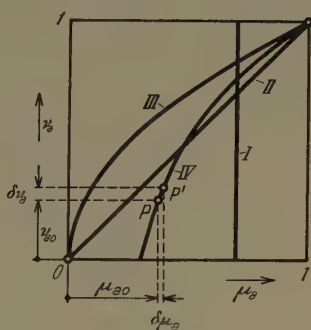
Durch Division der Gleichung (6) mit  $U_m$  folgt der Zusammenhang zwischen der bezogenen Drehzahl  $v$  und dem bezogenen Drehmoment  $\mu$  im offenen Regelkreis (Figur 9) unter Vernachlässigung der Reibung zu:

$$v = v_\alpha - \gamma \mu, \quad \gamma = \frac{R I_n}{U_m}. \quad (9)$$



Figur 9

Bezogene Drehzahl-Drehmomenten-Kennlinie des Stromrichterantriebes.



Figur 10

Bezogene Drehzahl-Drehmomenten-Kennlinie der Arbeitsmaschine.

Die entsprechenden Kennlinien der Arbeitsmaschine zeigt Figur 10 für die Fälle:

- I:  $\mu_a = \text{konstant}$  (zum Beispiel Hubwerk),
- II:  $\mu_a = v_a$  (linear),
- III:  $\mu_a = v_a^2$  (zum Beispiel Pumpe, Ventilator),
- IV: beliebig.

Beim offenen Regelkreis fällt nach Figur 8 die induzierte Spannung  $U_i$  und damit die Drehzahl  $v$  nach der Geraden  $AB$  ab, falls  $A_0B = RI$  gewählt wird. Wie liegen nun die Verhältnisse beim geschlossenen Regelkreis? Nimmt man für einen vorgegebenen Strom  $I$  zunächst einen willkürlichen Spannungsabfall  $AC_0$  an, so ergibt eine zu Figur 2 analoge Konstruktion mittels der Kennlinien  $K_2$  und  $K_3$  des Verstärkers beziehungsweise des Steuergerätes eine Erhöhung der Quellenspannung  $U_\alpha$  um  $AC_4$ . Die Verbindungslinien  $C_4C$ ,  $D_4D$  usw. für verschiedene Werte von  $\Delta U$  gehen nun alle im linearen Bereich durch einen Punkt  $S$ . Es stellt sich diejenige Gerade  $D_4D$  im geschlossenen Regelkreis ein, welche parallel zu den Kennlinien für  $U_i$ , also parallel zu  $AB$ , liegt, woraus

unter Vernachlässigung der Reibung folgt:

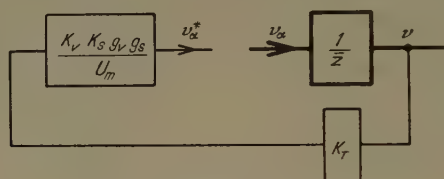
$$\Delta U_\alpha = K \Delta U, \quad \Delta U + \Delta U_\alpha = (1 + K) \Delta U = R I,$$

$$k = \frac{U_T}{U_i}, \quad K_v = \frac{U_1}{U_T}, \quad K_s = \frac{dU_\alpha}{dU_1}, \quad (10)$$

$$U = \frac{R}{1 + K} I, \quad K = k K_v K_s. \quad (11)$$

Beim geschlossenen Regelkreis ist also der Drehzahlabfall  $(1 + K)$ -mal kleiner als beim offenen.  $K$  ist der Verstärkungsfaktor im geschlossenen Regelkreis.

Für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens schneiden wir den Regelkreis an den Steuergittern des Stromrichters auf (Figur 11), fügen dort neben



Figur 11  
Aufgeschnittener Regelkreis.

einer konstanten Spannung eine Störspannung ein und untersuchen das Verhalten aller Regelgrößen unter der Wirkung dieser erzwungenen Schwingung, die wir als eine allgemeine Exponentialschwingung von der Form

$$\operatorname{Re} [\bar{A} e^{pt}] = A e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

mit der beliebigen Kreisfrequenz  $\omega$ , der beliebigen negativen oder positiven Dämpfung  $\sigma$ , also von der beliebigen komplexen Frequenz  $p = \sigma + j\omega$  wählen. Die massgebenden Gleichungen folgen einerseits aus dem Spannungsgleichgewicht des elektrischen Kreises und andererseits aus dem mechanischen Kreis nach NEWTON.

Die am inneren Widerstand  $R_g$  und an der Streuinduktivität  $L_g$  des Stromrichters, an einer eventuellen Glättungsrosselspule  $L_a$ , am Ankerwiderstand  $R_a$  und an der Ankerinduktivität  $L_a$  auftretenden Spannungen bedingen eine Spannungsdifferenz zwischen den Momentanwerten  $u_\alpha(t)$  der Quellenspannung und der induzierten Ankerspannung  $u_i(t)$ , welche (angenähert infolge Änderung der Überlappungszeit) beträgt:

$$u_\alpha(t) - u_i(t) = \left( R_g + R_a + \frac{2\pi}{m} f L_g \right) i + (L_g + L_a + L_a) \frac{di}{dt} = R i + L \frac{di}{dt}. \quad (12)$$



Für die komplexen Zeiger folgt daraus:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_\alpha - \bar{U}_i &= \left[ (R_g + R_a + \frac{2\pi}{m} f L_g) + (L_g + L_d + L_a) p \right] \bar{I}, \\ R &= R_g + R_a + \frac{2\pi}{m} f L_g, \quad L = L_g + L_d + L_a, \\ \bar{U}_\alpha - \bar{U}_i &= (R + p L) \bar{I} = R (1 + T_e p) \bar{I}, \quad T_e = \frac{L}{R} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

und daraus durch Division mit  $U_m$  für die bezogenen Zeiger:

$$\bar{v}_\alpha - \bar{v} = \frac{R I_n}{U_m} (1 + T_e p) \frac{\bar{I}}{I_n} = \gamma (1 + T_e p) \bar{\mu}, \quad \gamma = \frac{R I_n}{U_m}. \quad (14)$$

Die Differenz der Drehmomente  $M(t)$  des Motors und  $M_a(t)$  der Arbeitsmaschine wird für die Beschleunigung der Massen und für die zur Drehzahl proportional angenommene Reibung aufgebracht laut

$$M(t) - M_a(t) = J \frac{d\omega}{dt} + r \frac{\omega}{\omega_n} M_n, \quad (15)$$

woraus durch Division mit  $M_n$  für die komplexen Zeiger folgt:

$$\frac{\bar{M} - \bar{M}_a}{M_n} = \frac{\omega_n J}{M_n} p \bar{v} + r \bar{v} = r \bar{v} + T_n p \bar{v}, \quad (16a)$$

$$T_n = r T_m = \frac{\omega_n J}{M_n}, \quad \omega = 2\pi n, \quad (16b)$$

$$\bar{\mu} - \bar{\mu}_a = (r + T_n p) \bar{v} = r (1 + T_m p) \bar{v} = r \bar{z}_m \bar{v}. \quad (16c)$$

$T_n$  ist die Zeit zum Hochfahren der Maschinen unter der Wirkung des Nenn-drehmoments ( $M_a = 0$ ) bis zur Nenndrehzahl  $n_n$ . Linearisiert man nach Figur 10 für kleine Variationen den Zusammenhang zwischen Drehzahl und Drehmoment der Arbeitsmaschine laut

$$\mu_a = \mu_{a0} + K_a \delta v_a, \quad K_a = \frac{d\mu_a}{dv_a}, \quad \bar{\mu}_a = K_a \bar{v}_a, \quad (17)$$

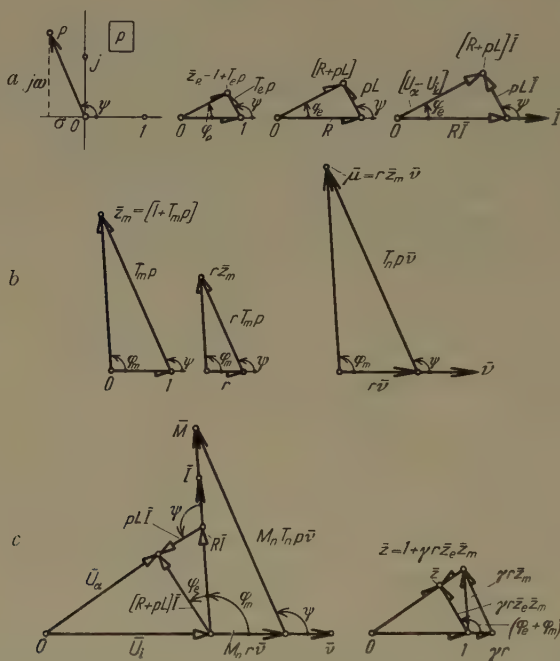
so folgt schliesslich für die starre Welle ( $v_a = v$ ) beim offenen Regelkreis:

$$\bar{\mu} = r' (1 + T'_m p) \bar{v} \quad \text{mit} \quad r' = r + K_a, \quad T'_m = \frac{r}{r'} T_m. \quad (18)$$

Die in diesen Gleichungen auftretenden Grössen, wie die Impedanz ( $R + p L$ ), die «bezogenen» Impedanzen oder Zeitglieder

$$\bar{z}_e = 1 + T_e p, \quad \bar{z}_m = 1 + T_m p \quad (19)$$

des elektrischen bzw. mechanischen Kreises sind in den Figuren 12a, b und c für komplexe Werte von  $p = |\dot{p}| \exp(j\psi)$  dargestellt. Aus diesen ergeben sich die ohmsche und induktive Spannung  $R\bar{I}$  bzw.  $pL\bar{I}$ , das Reibungsmoment  $M_n r \bar{v}$  in Phase mit  $\bar{v}$  sowie das Newtonsche Beschleunigungsmoment  $M_n T_n \dot{p}$  um  $\psi$  voreilend. Die Differenzspannung  $(\bar{U}_\alpha - \bar{U}_i)$  bewirkt den Ankerstrom  $\bar{I}$ , dieser das Drehmoment  $\bar{M}$ ; dieses, vermindert um das Gegenmoment  $\bar{M}_a$ , be-



Figur 12

Zeigerdiagramme für eine komplexe Frequenz  $p$ .

wirkt die Drehzahl  $\bar{n}$ , die ihrerseits die induzierte Spannung  $\bar{U}_i$  hervorruft. Nimmt man  $\bar{U}_\alpha$  oder  $\bar{v}_\alpha$  als Ursache,  $\bar{v}$  als Wirkung, so findet man aus der Figur 12c die Zusammenhänge

$$\bar{U}_\alpha - \bar{U}_i = R \bar{z}_e \bar{I}, \quad \bar{M} - \bar{M}_a = r M_n \bar{z}_m \bar{v} \quad (20)$$

und damit die für die kombinierte Wirkung des elektrischen und mechanischen Kreises charakteristische inverse Übertragungsfunktion  $\bar{z}(p)$  zwischen den bezogenen Leerlauf- und Lastdrehzahlen

$$\bar{z}(p) = \frac{\bar{v}_\alpha}{\bar{v}} = 1 + \gamma r \bar{z}_e \bar{z}_m. \quad (21)$$

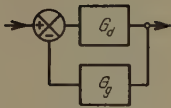




$G_a(p)$  erhält man durch mehrmaliges Anwenden der Formel

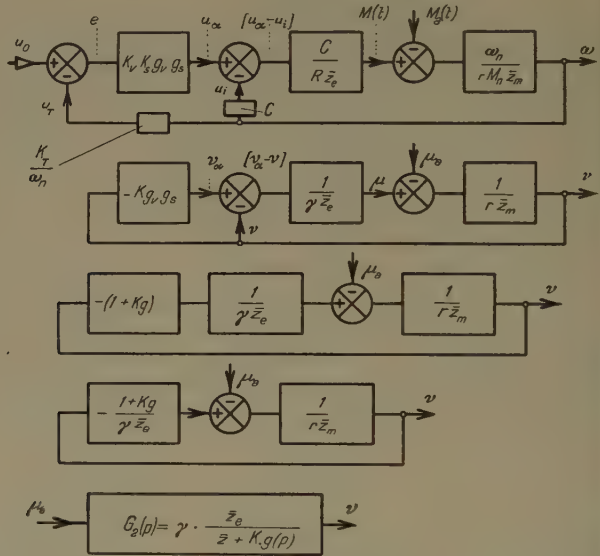
$$G = \frac{G_a}{1 + G_a G_g} \quad (25)$$

für den gegengekoppelten Kreis nach Figur 15 auf Figur 16 mit  $\bar{\mu}_a$  als Ursache und bei konstantem  $U_0$ . Dieses Verfahren wird bei komplizierten Servosystemen mit mehrfachen Gegenkopplungen mit Erfolg angewandt und entspricht dem Auflösen von Gleichungen mit mehreren Unbekannten.



Figur 15

Gegengekoppeltes System.



Figur 16

Blockschema zur Ermittlung der Übertragungsfunktion zwischen  $M_a(t)$  und  $\omega(t)$ .

Sind die Zeitverzögerungen des Verstärkers und des Steuersatzes vernachlässigbar gegenüber den übrigen, ist also  $g(p) = 1$ , so gehen die Eigenfrequenzen aus der Gleichung

$$\bar{z}(p) + K = 0 \quad (26)$$

hervor. Hiefür fällt in Figur 13  $P$  auf  $K_0$ , und es sind zum Bildpunkt  $K_0$  die zwei Originalpunkte in der  $p$ -Ebene zu suchen. Denkt man sich den Verstärkungsfaktor  $K$  von Null ansteigend, so interessiert das Wandern der zugehörigen Wurzeln  $p_1, p_2$  in der Frequenzebene. Diese Wurzelmethode kann zur Bestimmung der oberen Grenze von  $K$  bestimmt werden, die eintritt, wenn Wurzeln die imaginäre Achse überschreiten, das System also instabil wird. Man sucht dazu das Bild der negativen reellen Achse der  $z$ -Ebene in der  $p$ -Ebene



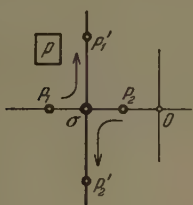
auf. Im vorliegenden Falle liegen die Verhältnisse besonders einfach. Aus (21) folgt

$$T_e T_m p^2 + (T_e + T_m) p + \frac{1 + K}{\gamma r} = 0 \tag{27}$$

und daraus

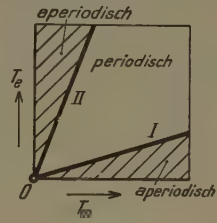
$$\sigma = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_m} \right); \tag{28}$$

also liegen komplexe Wurzeln unabhängig von  $K$  stets auf der Senkrechten im Abstand  $(-\sigma)$  vom Ursprung. Reelle Wurzeln sind zudem negativ. Sind die beiden Wurzeln des offenen Regelkreises beispielsweise negativ reell, und verstärkt man nun die Gegenkopplung sukzessive durch Steigern von  $K$ , so gehen die beiden Wurzeln zunächst in eine Doppelwurzel  $(-\sigma)$  über und werden daraufhin komplex mit zunehmender Frequenz  $\omega$  (Figur 17). Je stärker die Gegenkopplung, um so höher ist also die Frequenz der Exponentialschwingung



Figur 17

Das Wandern der Wurzeln in der komplexen Frequenzebene.



Figur 18

Die drei Gebiete für aperiodische und periodisch gedämpfte Übergänge.

bei gleichbleibender Dämpfung  $\sigma$ . Ein stabiles System zweiten Grades wird infolgedessen durch eine beliebig starke, keine Zeitverzögerung aufweisende Gegenkopplung nicht instabil. Dieses Wandern der Wurzeln bei wachsender Gegenkopplung kann analog studiert werden für Systeme höheren Grades in  $p$ . Man geht vom offenen Kreis aus, wobei für stabile Systeme alle Wurzeln auf der negativ reellen Achse liegen und bei zunehmendem Wert von  $K$  eventuell über die imaginäre Achse in die rechte Halbebene übertreten können.

Die wichtige Grenze zwischen aperiodischem und periodisch gedämpftem Vorgang, also bei der kritischen Dämpfung mit verschwindender Determinante, führt bei  $g(p) = 1$  zu den zwei Gleichungen

$$\frac{T_e}{T_m} = \frac{\gamma}{4} \left( 1 - \frac{1}{2} \gamma r + \dots \right) \frac{1}{1 + K}, \quad \frac{T_e}{T_m} = \frac{4}{\gamma r^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \gamma r + \dots \right) (1 + K). \tag{29}$$

Diese Beziehung zwischen den beiden Zeitkonstanten  $T_e$ ,  $T_m$  wird durch zwei Gerade nach Figur 18 dargestellt. Schwingungen zwischen dem magnetischen Energiespeicher  $L$  und dem mechanischen Energiespeicher  $J$  sind um so schwie-

riger zu vermeiden, je stärker die Gegenkopplung ist. Um so kleiner wird gleichzeitig die Periodendauer der gedämpften Schwingung und erreicht schliesslich einen Wert, für den die Voraussetzungen der Theorie nicht mehr gültig sind. Denn beim 6-Phasen-Stromrichter bei 50 Hz Netzfrequenz erfolgt die Wirkung der Steuergitter unstetig nach je 3,33 ms, die Signale weisen also eine «Totzeit» auf. Zu hohe Verstärkungen sind also zwecklos. Glättungsdrosseln  $L_d$  erhöhen  $T_e$  und damit die Neigung zu Schwingungen.

Dem folgenden Zahlenbeispiel liegt ein plötzliches Abfallen des Gegendrehmomentes um den Wert  $\Delta M_n$ , laut  $\mu_a(t) = +\Delta[1]_t$  zugrunde.

Die Laplace-Transformierte von  $v$  für diese Schrittfunction (als Spezialfall einer Exponentialschwingung  $p = 0$ ) von  $\mu_a$  ergibt sich bei  $g(p) = 1$  aus (24b)

$$L(v) = \gamma \Delta \frac{1}{p} \cdot \frac{1 + T_e p}{z(p) + K}, \quad (30)$$

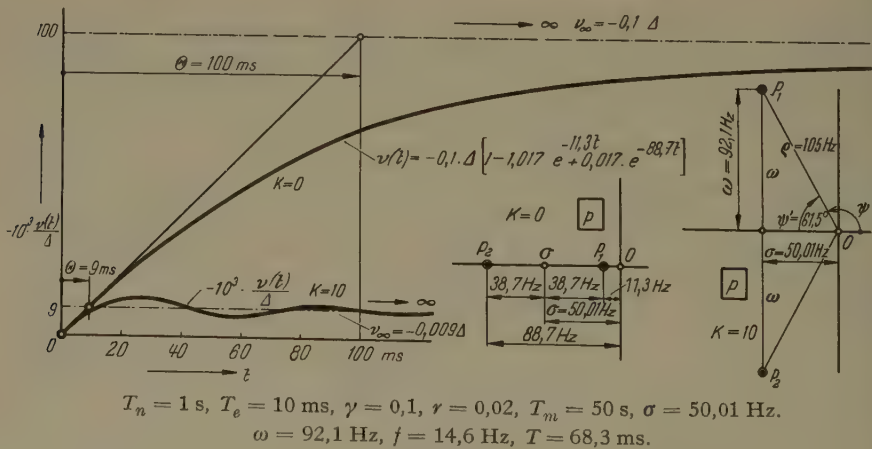
deren Lösung für reelle Wurzeln  $p_1 p_2$  lautet:

$$\frac{v}{\Delta} = \frac{-\gamma}{1 + K + \gamma r} (1 + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}) \quad (31a)$$

und für komplexe  $(\psi' = \pi - \psi)$ :

$$\frac{v}{\Delta} = \frac{-\gamma}{1 + K + \gamma r} \left( 1 - e^{-\sigma t} \frac{\sin(\omega t + \psi')}{\sin \psi'} \right) + \frac{1}{\omega T_n} e^{-\sigma t} \sin \omega t. \quad (31b)$$

Die Figur 19 zeigt den Verlauf von  $v$  für den offenen ( $K = 0$ ) und den geschlossenen Regelkreis mit  $K = 10$ , wobei für letzteren der Endwert 11mal kleiner ist



Figur 19

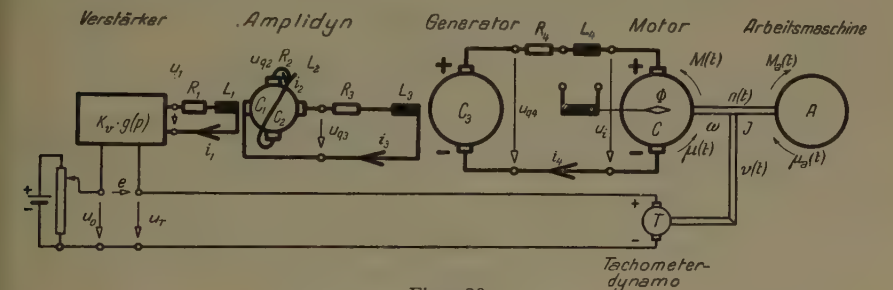
Oszillogramm der bezogenen Drehzahl  $v(t)$  beim offenen und geschlossenen Regelkreis. Lage der Wurzeln in der Frequenzebene.

und zudem viel schneller erreicht wird, da die Anfangstangenten für beide Fälle identisch sind. Darin liegt der Grund für die «Verkleinerung der Zeitkonstanten» bei steigendem  $K$ . Nimmt man als Zeitkonstante die Zeit bis zur Erreichung des Endwertes mit der Anfangsgeschwindigkeit, so verhalten sich diese wie 1:11.

Haben der Verstärker und der Gittersteuersatz wesentliche Zeitverzögerungen  $[g(p) \neq 1]$ , so kann das System instabil werden.

C. Drehzahlregelung eines Walzmotors

Das folgende Zahlenbeispiel<sup>1)</sup> behandelt nach Figur 20 einen mittels einer Tachometerdynamo  $T$ , eines Verstärkers und einer Amplidynmaschine gere-



Figur 20  
Schema des Walzmotorantriebes.

gelten Ward-Leonard-Satz zum Konstanthalten der Drehzahl eines Walzmotors von

$P_n = 785 \text{ kW}$	Nennleistung,
$I_n = 1250 \text{ A}$	Nenngleichstrom,
$U_{in} = 628 \text{ V}$	induzierte Nennankerspannung,
$n_n = 150 \text{ U./min} = 2,5 \text{ Hz}$	Nenndrehzahl.

Wir betrachten sukzessive die Übertragungsfunktionen der einzelnen Organe (Figur 21 a).

Verstärker  
 $K_v = 12, \quad g(p) = 1.$

Amplidynmaschine

Längsfeld:	$R_1 = 80 \, \Omega, \quad L_1 = 8 \text{ H}, \quad T_1 = 0,1 \text{ s}, \quad \bar{z}_1 = 1 + T_1 p;$
Querfeld:	$R_2 = 1,06 \, \Omega, \quad L_2 = 0,318 \text{ H}, \quad T_2 = 0,3 \text{ s}, \quad \bar{z}_2 = 1 + T_2 p;$
Maschinenkonstante:	$C_1 C_2 = 2870 \, \Omega \text{ A},$ voll kompensiert.

<sup>1)</sup> HAROLD CHESTNUT und ROBERT W. MAYER, *Servomechanisms and Regulating System Design*, Bd. I (John Wiley and Sons Inc., New York und London 1951), Seite 468.



*Generator*

$$R_3 = 7,75 \, \Omega, \quad L_3 = 24,4 \, \text{H}, \quad T_3 = 3,15 \, \text{s} \quad C_3 = 18,5 \, \Omega, \quad \bar{z}_3 = 1 + T_3 p.$$

*Motor*

$$\begin{aligned} \text{Induzierte Spannung: } U_i &= C \, \omega, & U_{in} &= C \, \omega_n, \\ \text{Drehmoment: } M &= C I, & M_n &= C I_n, \\ \text{Maschinenkonstante: } C &= 40 \, \text{N m A}^{-1} = 40 \, \text{Vs}, \\ \text{Winkelgeschwindigkeit: } \omega_n &= 2\pi n_n = 15,7 \, \text{Hz}. \end{aligned}$$

*Stromkreis – Generator – Motor*

$$\begin{aligned} \text{Widerstand: } R_4 &= 12 \, \text{m}\Omega, \\ \text{Induktivität: } L_4 &= 0 \quad \text{vernachlässigt.} \end{aligned}$$

*Arbeitsmaschine*

$$M_a = \text{konstant (Fall I von Figur 10)}, \quad g_a(p) = 0.$$

*Aggregat Motor-Arbeitsmaschine*

$$\begin{aligned} \text{Trägheitsmoment: } J &= 6000 \, \text{kg m}^2, \\ \text{Reibung: } r &= 0. \end{aligned}$$

*Tachometer*

$$\bar{U}_T = K_T \bar{v}, \quad K_T = 15,708 \, \text{V}.$$

In Figur 21a sind die Übertragungsfunktionen der einzelnen Glieder dargestellt. Das Zeitglied des aus beiden Ankern bestehenden Kreises ist

$$\bar{z}_4 = 1 + T_4 p \quad \text{mit} \quad T_4 = L_4 : R_4.$$

Aus Figur 21b erhält man:

$$\bar{v} = G_1(p) \bar{u}_0 - G_2(p) \bar{\mu}_a, \quad (32)$$

$$G_1(p) = \frac{K}{K_T} \cdot \frac{g(p)}{h(p) + K g(p)}, \quad G_2(p) = \gamma \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}} \cdot \frac{h(p)}{h(p) + K g(p)} \quad (32a)$$

mit

$$z = 1 + \gamma r \bar{z}_4 \bar{z}_m, \quad \gamma = \frac{R_4 I_n}{U_{in}}, \quad (32b)$$

$$h(p) = \bar{z} \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3, \quad (32c)$$

$$K = \frac{K_T K_v C_1 C_2 C_3}{\omega_n C R_1 R_2 R_3} = 24,236. \quad (32d)$$

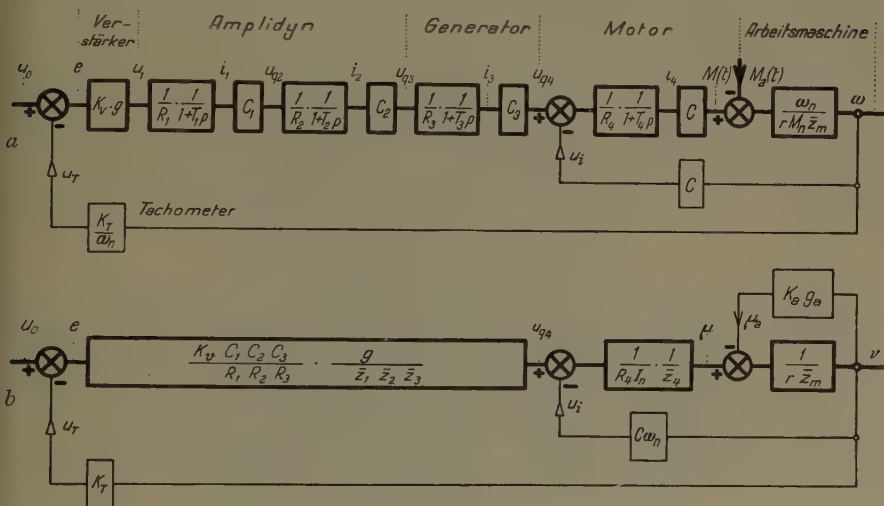
Mit der reziproken Übertragungsfunktion  $h_v(p)$  des Verstärkers

$$h_v(p) = \frac{1}{g(p)} \quad (32e)$$

erhält man:

$$G_1(p) = \frac{K}{K_T} \cdot \frac{1}{h_n(p) h(p) + K}, \quad (33a)$$

$$G_2 = \gamma \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}} \cdot \frac{h_v(p) h(p)}{h_v(p) h(p) + K} \quad (33b)$$



Figur 21  
Blockschema des Antriebes nach Figur 20.

Im vorliegenden Beispiel wurden  $L_4$  und  $r$  vernachlässigt, damit erhält man:

$$\bar{z}_4 = 1, \quad \bar{z} = 1 + \gamma r \bar{z}_m = 1 + \gamma T_n p = 1 + T_0 p = \bar{z}_0,$$

$$T_0 = \gamma T_n = \gamma \frac{\omega_n J}{M_n} = \frac{R_4 J}{C^2} = 45 \text{ ms} \quad (34)$$

und für die Hochfahrzeit  $T_n = 1,88$  s. Der Ausdruck  $\bar{z}$  ist also in eine lineare Funktion von  $p$  übergegangen. Der Spannungsverstärkungsfaktor zwischen der Fehlerspannung  $E$  und der Quellenspannung  $U_{q4}$  des Generators beträgt

$$K_e = \frac{U_{q4}}{E} = \frac{K_v C_1 C_2 C_3}{R_1 R_2 R_3} = 969,46. \quad (35)$$

Die Übertragungsfunktionen  $G_1$  und  $G_2$  für den offenen Regelkreis sind besonders einfach:

$$G_1(p) = \frac{K_e}{U_{n_i}} \cdot \frac{1}{h_n(p) h(p)}, \quad (36)$$

$$G_2(p) = \gamma \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}} = \gamma \frac{1}{\bar{z}_0}. \quad (37)$$

Das Produkt  $h(p)$  der vier Zeitglieder ist in der Kenneleyschen Schreibweise

$$h(p) = \bar{z}_0 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_3 = (1 + T_0 p) (1 + T_1 p) (1 + T_2 p) (1 + T_3 p),$$

$$h(p) = \prod_v A_v / \sum_v \varphi_v = H / \varphi, \quad \bar{z}_v = 1 + T_v p = A_v / \varphi_v.$$

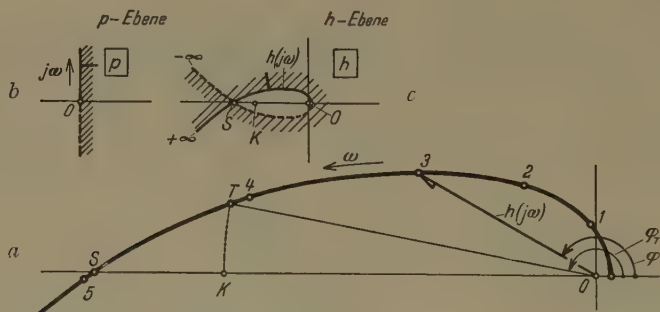
Die Eigenfrequenzen des gesamten Systems ergeben sich aus den Nullstellen von

$$h_v(p) h(p) + K = 0. \quad (38)$$

Der für viele Servoprobleme charakteristische Ausdruck  $h_v(p) h(p)$  ist oft ein Produkt von linearen und quadratischen Gliedern in  $p$ . Ist speziell  $g(p) = 1$ , so wird

$$h(p) = -K. \quad (39)$$

Wenn die vier Wurzeln dieser Gleichung negative Realteile haben, so ist das System stabil. Will man die Bestimmung dieser Wurzeln vermeiden, so muss man eines der Stabilitätskriterien anwenden. Wir zeichnen beispielsweise das Bild der Geraden  $p = j\omega$ , also die komplexe Frequenzgangskurve  $h(j\omega)$  in der  $h$ -Ebene, Figur 22a (Leonhard-Kurve). Die rechte  $p$ -Halbebene (Figur 22b) geht dabei in das schraffierte Gebiet (Figur 22c) über. Da nun der Punkt



Figur 22  
Leonhard-Kurve der Funktion  $h(p)$ .

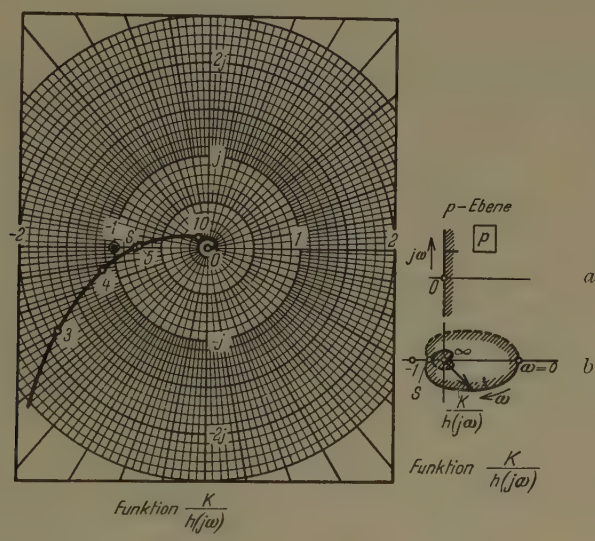
$$h(j\omega) = (1 + 0,045 j\omega) (1 + 0,1 j\omega) (1 + 0,3 j\omega) (1 + 3,15 j\omega) = H e^{j\varphi}$$

$\omega$	0,3	1	2	3	4	5	10
$H$	1,38	3,46	7,60	13,4	21,3	33,6	154,2
$\varphi$	51° 04'	97° 24'	128° 26'	150° 22'	167° 43'	181° 53'	229°



( $-K = -24,24$ ) im nichtschraffierten Gebiet liegt, ist das System stabil. Der höchstzulässige Wert des Verstärkungsfaktors  $K$  der Schleife liegt bei 33,2, wenn der Punkt  $K$  auf den Schnittpunkt  $S$  fällt. Die Marge ist also nicht sehr gross. Will man vorsichtig sein, so wird man ein stabilisierendes, phasendrehendes Glied einbauen.

Die Nyquist-Methode verlangt nach Gleichung (33a), (33b) oder (38) das Aufzeichnen der Kurve  $[K: h_v(j\omega) h(j\omega)]$ , wofür in den USA Vordrucke ver-



Figur 23  
Nyquist-Diagramm.

wendet werden<sup>1)</sup>. Befindet sich wie in den Figuren 23 und 23b der Punkt ( $-1/0j$ ) ausserhalb der schraffierten Fläche, so liegt Stabilität vor. Figur 24 zeigt schliesslich die doppellogarithmische Darstellung der Amplitude  $H$  und Phase  $\varphi$  von  $h(j\omega)$  sowie den zugehörigen charakteristischen Polygonzug der Asymptoten nach BODE. Man sucht hier den Schnittpunkt  $S$  für  $\varphi = \pi$  und ermittelt, ob der zugehörige Amplitudenwert  $H(S)$  grösser als  $K$  ist. Oder man sieht zu, ähnlich wie in Figur 22, ob die Phase  $\varphi_T$  des Punktes  $T$  für  $H = K$  kleiner als  $\pi$  ist.

Noch einige Zahlenwerte zur Erläuterung der Präzision. Die Quellenspannung des Generators beträgt bei Nennbetrieb  $R_4 I_n = 15 \text{ V}$  mehr als die induzierte Motorspannung  $U_{ni} = 628 \text{ V}$ . Im offenen Regelkreis steigt deshalb bei

<sup>1)</sup> HAROLD CHESTNUT und ROBERT W. MAYER, *Servomechanisms and Regulating System Design*, Bd. I (John Wiley and Sons Inc., New York und London 1951), Seite 468.

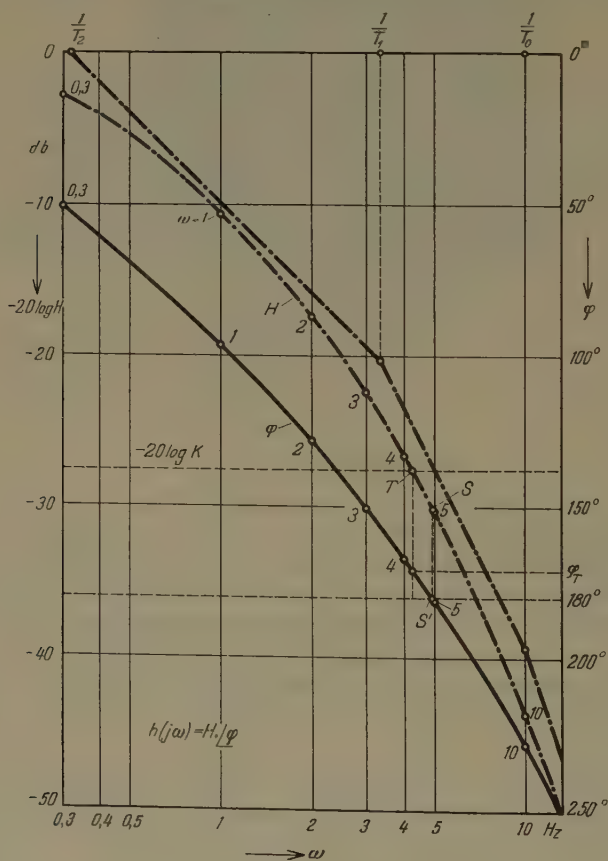
voller Entlastung die Drehzahl um

$$\gamma = \frac{R_4 I_n}{U_{ni}} = \frac{\Delta \omega}{\omega_n} = 2,39\%.$$

Die Spannung  $U_0 = E$  ist dabei  $K_e = 969,46$ mal kleiner und beträgt 663,3 mV. Wie sich aus (32) und (33b) für  $\Delta \mu_a = 1$  und  $\bar{U}_0 = 0$  entnehmen lässt, beträgt im geschlossenen Regelkreis bei voller Entlastung die Drehzahlerhöhung

$$\Delta \nu = \frac{\gamma}{1 + K} = 0,95 \text{ ‰}; \quad (40)$$

wir haben also eine Ein-Promille-Steuerung. Bei voller Entlastung von der Nennleistung steigt die induzierte Spannung von 628 V um 0,95‰ auf



Figur 24  
Bode-Diagramm.

628,594 V, während gleichzeitig die Quellenspannung  $U_{a4}$  von 643 V auf diesen Wert zurückgeht. Die Tachometerspannung  $U_T$  steigt ebenfalls um  $0,95\%$  von 15,708 V auf 15,723 V. Diese minime Änderung um nur 14,9 mV bewirkt also die totale Änderung der mechanischen Leistung um 785 kW. Dabei bleibt die Vergleichsspannung konstant bei  $U_0 = 16,371$  V, während die Fehlerspannung von  $E_n = 663,3$  mV auf  $E_0 = 648,4$  mV zurückgeht. Sie ist ja proportional zu  $U_{a4}$ , aber 969,46mal kleiner. Man kann daraus ermessen, welche hohen Anforderungen an die Präzision und Konstanz aller Teile des gesamten Regelkreises gestellt werden.

Ist die Drehzahl  $\nu = \nu_a$  nach den Figuren 10 und 21 b durch  $K_a g_a(p)$  mit dem Drehmoment  $\mu_a$  verknüpft, so ergibt sich aus (32) eine zu (4c) analoge Beziehung

$$\bar{\nu} = \frac{G_1(p)}{1 + [\gamma \bar{z}_4 K_a g_a(p) / \bar{z} + K g(p)]}.$$

Ändert sich  $K_a g_a(p)$  zeitlich, so resultiert eine nichtlineare Differentialgleichung.

Die experimentelle Untersuchung des Frequenzganges von Servosystemen umfasst gegenüber der Rechnung weitere Einflüsse, wie Wirbelströme, die magnetische Hysterese, die Reibung usw. Wie man aus den Werten von  $\omega$  der Figur 24 ersieht, benötigt man hierfür zur Untersuchung grösserer Aggregate Generatoren mit sinusförmiger Spannung und enorm kleiner Frequenz, zum Beispiel 0,1... 10 Hz.

Soll die Eisensättigung mit berücksichtigt werden, so müssen zur Behandlung der dadurch auftretenden nichtlinearen Differentialgleichungen Analogierechenngeräte mit nichtlinearen Gliedern herausgezogen werden.

### Résumé

Cette étude traite trois exemples tirés de l'électro-servotechnique. On construit d'abord dans un graphique les caractéristiques extérieures d'un générateur réglé en circuit fermé. Puis on discute le réglage automatique du nombre de tours d'un moteur commandé par un redresseur. Enfin le réglage en circuit fermé d'un moteur accouplé à un laminoire est traité par un calcul numérique; les différents critères de stabilité permettent de déterminer l'amplification de limite.

(Eingegangen: 31. März 1954.)



# Deformations Possible in Every Isotropic, Incompressible, Perfectly Elastic Body

By JERALD LAVERNE ERICKSEN, Washington, D.C., U.S.A.<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

The problem considered here is that of determining deformations which can be produced in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body by the application of surface tractions when there is no body force acting. Examples of such deformations may be found in the general solutions for homogeneous deformation [1]<sup>2)</sup>, [2], torsion of a right circular cylinder [1], [3], bending of a block [4], deformation of a spherical shell subject to internal and external pressures [5], and in a five-parameter family of solutions recently obtained for materials possessing transverse isotropy [6]. These latter solutions were discovered in an attempt to solve the problem discussed here. Three of the solutions obtained here are new.

Let the points of an undeformed elastic body be assigned coordinates  $X^\alpha$  in a coordinate system with metric tensor<sup>3)</sup>  $G_{\alpha\beta}$ . Suppose the body is subjected to a deformation, and let the points of the deformed body be assigned coordinates  $x^i$  in any independently selected coordinate system with metric tensor  $g_{ij}$ . Greek indices always refer to the coordinates  $X^\alpha$ , Latin to the coordinates  $x^i$ . It is assumed that the deformation is described by a one-to-one mapping,

$$x^i = x^i(X^\alpha), \quad (1.1)$$

which is at least three times continuously differentiable.

When the inertial and body forces vanish, the equations governing the behavior of a material of the type considered here become

$$t^i_j = 0, \quad (1.2)$$

$$t^i_j = -p \delta^i_j + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} (c^{-1})^i_j - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} c^i_j, \quad (1.3)$$

$$|c^i_j| = 1, \quad (1.4)$$

<sup>1)</sup> Applied Mathematics Branch, Mechanics Division, Naval Research Laboratory.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to the Bibliography on page 489.

<sup>3)</sup> We use standard tensorial notation. See, e.g., [7].

where  $t_j^i$  is the stress tensor,  $p$  is an arbitrary pressure,  $|c_j^i|$  is the determinant of the matrix  $\|c_j^i\|$  of the tensor  $c_j^i$ ,

$$c_{ij} = G_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial X^\beta}{\partial x^j}, \quad (1.5)$$

$$(c^{-1})^{ij} = G^{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial X^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}, \quad (1.6)$$

$$I = (c^{-1})_i^i, \quad II = \frac{1}{2} [I^2 - (c^{-1})^{ij} (c^{-1})_{ij}], \quad (1.7)$$

and  $\Sigma = \Sigma(I, II)$  is the strain energy, assumed to be at least three times continuously differentiable with respect to  $I$  and  $II$ . As is easily verified,

$$(c^{-1})^{ij} c_{jk} = \delta_k^i. \quad (1.8)$$

Since we are working in Euclidean space, the Riemann tensor based on  $G_{\alpha\beta}$  vanishes. It then follows from (1.5) that the Riemann tensor  $R_{ijk l}$  based on  $c_{ij}$  must vanish. Analytically<sup>1)</sup>,

$$4 R_{ijk l} = 2 \left( -\frac{\partial^2 c_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 c_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 c_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 c_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} \right) + (c^{-1})^{mn} \left[ \left( \frac{\partial c_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial c_{km}}{\partial x^j} - \frac{\partial c_{jk}}{\partial x^m} \right) \left( \frac{\partial c_{in}}{\partial x^l} + \frac{\partial c_{ln}}{\partial x^i} - \frac{\partial c_{il}}{\partial x^n} \right) - \left( \frac{\partial c_{jm}}{\partial x^l} + \frac{\partial c_{lm}}{\partial x^j} - \frac{\partial c_{jl}}{\partial x^m} \right) \times \left( \frac{\partial c_{in}}{\partial x^k} + \frac{\partial c_{kn}}{\partial x^i} - \frac{\partial c_{ik}}{\partial x^n} \right) \right] = 0. \quad (1.9)$$

For  $R_{ijk l}$  to be the zero tensor, it is necessary and sufficient that the six components  $R_{1212}$ ,  $R_{2323}$ ,  $R_{3131}$ ,  $R_{1223}$ ,  $R_{2331}$ ,  $R_{3112}$  vanish.

Suppose we are given a symmetric tensor  $c_{ij}$  such that the matrix  $\|c_{ij}\|$  is positive definite. We can then use (1.8) to determine  $(c^{-1})^{ij}$ . If these tensors satisfy (1.9), and if  $G_{\alpha\beta}$  is a given Euclidean metric tensor, there will exist, at least locally, a mapping of the form (1.1) such that (1.5) and (1.6) are satisfied. In order that  $c_{ij}$  determine deformations<sup>2)</sup> possible in an incompressible material, it must satisfy (1.4). Suppose these kinematical conditions are satisfied and that the function  $\Sigma(I, II)$  is specified. Then, if it is possible to determine  $t_j^i$  and  $p$  such that (1.2) and (1.3) are satisfied,  $c_{ij}$  corresponds to a deformation possible in a material for which  $\Sigma$  is the strain energy. Even if such a deter-

<sup>1)</sup> TRUESDELL has compiled a long list of papers in which equations (1.9) or equations equivalent to these are discussed. See Math. Rev. 12, 556 (1951).

<sup>2)</sup> As is well known,  $c_{ij}$  determines the deformation only to within a rigid motion of the undeformed material.

mination be possible for one choice of  $\Sigma$ , it will not, in general, be possible for arbitrary choices of  $\Sigma$ . We will determine the exceptional tensors  $c_{ij}$  such that this determination is possible for every choice of  $\Sigma$  under rather weak restrictions on the form of  $c_{ij}$ . We shall compute the corresponding stresses and describe a simple physical situation to which the solution applies in some cases where such information is not available in the literature.

We shall make use of the fact that a matrix of the form

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$$

is positive definite if and only if  $a > 0$ ,  $b > 0$ , and  $b d > c^2$ . Also, if  $u_i$  and  $v_i$  are two vectors such that  $u_i v_j = u_j v_i$ , and if  $v_i$  is not the null vector, there exists a scalar  $\lambda = u_i v^i / v^j v_j$  such that  $u_i = \lambda v_i$ . If  $u_i = u_{,i}$  and  $v_i = v_{,i}$ , where  $u$  and  $v$  are scalars, then  $\lambda$  and  $u$  must be functions of  $v$ . If  $u_i$  and  $v_i$  are both null vectors then, of course,  $u_i = \lambda v_i$  holds for any  $\lambda$ .

## 2. Differential Equations Determining the Exceptional Tensors $c_{ij}$

From (1.2) and (1.3),

$$\left. \begin{aligned} p^{,i} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} (c^{-1})^{ij}_{,j} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} c^{ij}_{,j} + 2 \left( \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I^2} I_{,j} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial II \partial I} II_{,j} \right) (c^{-1})^{ij} \\ - 2 \left( \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I \partial II} I_{,j} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial II^2} II_{,j} \right) c^{ij} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Differentiating (2.1), we obtain

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} p_{,ik} = a^1_{ik} \frac{\partial \Sigma}{\partial I} + a^2_{ik} \frac{\partial \Sigma}{\partial II} + a^3_{ik} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I^2} + a^4_{ik} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I \partial II} + a^5_{ik} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial II^2} \\ + a^6_{ik} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial I^3} + a^7_{ik} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial I^2 \partial II} + a^8_{ik} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial I \partial II^2} + a^9_{ik} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial II^3} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

where

$$\begin{aligned} a^1_{ik} &= (c^{-1})^j_{i,jk}, \\ a^2_{ik} &= -c^j_{i,jk}, \\ a^3_{ik} &= I_{,k} (c^{-1})^j_{i,j} + [I_{,j} (c^{-1})^j_i]_{,k}, \\ a^4_{ik} &= II_{,k} (c^{-1})^j_{i,j} - I_{,k} c^j_{i,j} + [II_{,j} (c^{-1})^j_i]_{,k} - (I_{,j} c^j_i)_{,k}, \\ a^5_{ik} &= -II_{,k} c^j_{i,j} - (II_{,j} c^j_i)_{,k}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_{ik}^6 &= I_{,k} I_{,j} (c^{-1})_i^j, \\ a_{ik}^7 &= II_{,k} I_{,j} (c^{-1})_i^j + I_{,k} II_{,j} (c^{-1})_i^j - I_{,k} I_{,j} c_i^j, \\ a_{ik}^8 &= II_{,k} II_{,j} (c^{-1})_i^j - II_{,k} I_{,j} c_i^j - I_{,k} II_{,j} c_i^j, \\ a_{ik}^9 &= II_{,k} II_{,j} c_i^j. \end{aligned}$$

In order that there exist a function  $p$  satisfying (2.1), it is necessary and sufficient that the right member of (2.2) be a symmetric tensor. Suppose  $c_{ij}$  is such that this condition is satisfied for every choice of the function  $\Sigma(I, II)$ . At a given point  $P$ ,  $I$  and  $II$  have definite values, and we can choose  $\Sigma$  such that all but one of the derivatives of  $\Sigma$  occurring in (2.2) vanish at  $P$ . It then follows easily that the tensor which is multiplied by the non-zero derivative must be symmetric at  $P$ . It is thus clear each of the tensors  $a_{ik}^1, \dots, a_{ik}^9$  must be symmetric. We must thus determine symmetric tensors  $c_{ij}$  which satisfy (1.4) and (1.9), which are such that the matrix  $\|c_{ij}\|$  is positive definite, and such that each of the tensors  $a_{ik}^1, \dots, a_{ik}^9$  is symmetric.

Suppose that  $I$  and  $II$  are not both constant, and exclude isolated points where  $I_{,i} = II_{,i} = 0$ . The condition that  $a_{ik}^9$  be symmetric is

$$II_{,k} II_{,j} c_i^j = II_{,i} II_{,j} c_k^j,$$

and  $II_{,i} = 0$  implies that  $II_{,j} c_i^j = 0$ . Thus there exists a scalar  $A$  such that

$$II_{,j} c_i^j = A II_{,i}. \quad (2.3)$$

Either  $II_{,i} = 0$  or  $II_{,i}$  is an eigenvector of  $c_j^i$  and  $A$  is the corresponding eigenvalue. Since the eigenvectors of  $c_j^i$  and its inverse,  $(c^{-1})_j^i$ , coincide either  $II_{,i} = 0$  or  $II_{,i}$  is an eigenvector of  $(c^{-1})_j^i$ . A similar analysis applied to  $a_{ik}^6$  shows that either  $I_{,i} = 0$ , or  $I_{,i}$  is an eigenvector of  $(c^{-1})_j^i$ , hence of  $c_j^i$ . Thus

$$I_{,j} c_i^j = \bar{A} I_{,i}, \quad (2.4)$$

where  $\bar{A}$  is the eigenvalue corresponding to  $I_{,i}$  unless  $I_{,i} = 0$ , in which case  $\bar{A}$  is arbitrary. Setting the anti-symmetric part of  $a_{ik}^8$  equal to zero, then using the above results, we obtain

$$(A - \bar{A})(II_{,k} I_{,i} - I_{,k} II_{,i}) = 0. \quad (2.5)$$

We assert that we can take  $A = \bar{A}$ . This is clearly true if  $I_{,i} = 0$  or  $II_{,i} = 0$ , for then  $A$  or  $\bar{A}$  is arbitrary. Suppose neither  $I_{,i} = 0$  nor  $II_{,i} = 0$  and that  $A \neq \bar{A}$ . Then (2.5) implies that  $I_{,i}$  and  $II_{,i}$  are parallel. But  $I_{,i}$  and  $II_{,i}$ , being eigenvectors of  $c_j^i$  corresponding to distinct eigenvalues, are perpendicular, so we are led to a contradiction. Thus  $A = \bar{A}$ . We next assert that  $I$  and  $II$  must

be functionally dependent. If I or II is constant, the assertion follows. If not, and if all the eigenvalues of  $c_j^i$  are distinct, then  $I_{,i}$  and  $II_{,i}$ , being eigenvectors of  $c_j^i$  corresponding to the same eigenvalue, are parallel. Thus I and II are functionally dependent. Let  $c_1, c_2, c_3$  be the eigenvalues of  $c_j^i$ . Then, from (1.7),

$$I = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}, \quad II = \frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_2 c_3} + \frac{1}{c_3 c_1}, \quad (2.6)$$

and, from (1.4),

$$c_1 c_2 c_3 = 1. \quad (2.7)$$

In a region where  $c_j^i$  has equal eigenvalues, it follows from these equations that I and II are functionally dependent, so the assertion is true. Thus there exists a nonconstant function  $B$  such that  $I = I(B)$ ,  $II = II(B)$ . From (2.6) and (2.7), we then have  $c_1 = c_1(B)$ ,  $c_2 = c_2(B)$ ,  $c_3 = c_3(B)$ . We assume the notation chosen so that  $A = \bar{A} = c_1$ . Then (2.3) and (2.4) yield

$$B_{,j} c_i^j = c_1 B_{,i}. \quad (2.8)$$

Now

$$\begin{aligned} a_{ik}^5 &= -II' B_{,k} c_{i,j}^j - (II' B_{,j} c_i^j)_{,k} \\ &= -II' B_{,k} c_{i,j}^j - (II' c_1 B_{,i})_{,k} \\ &= -II' B_{,k} c_{i,j}^j - (II' c_1)' B_{,i} B_{,k} - II' c_1 B_{,ik}, \end{aligned}$$

where primes denote differentiation with respect to  $B$ . Thus, in order that  $a_{ik}^5$  be symmetric, we must have

$$II' (B_{,k} c_{i,j}^j - B_{,i} c_{k,j}^j) = 0.$$

Thus either II is constant, or there exists a scalar  $D$  such that

$$c_{i,j}^j = D B_{,i}. \quad (2.9)$$

A similar analysis applied to  $a_{ik}^3$  yields

$$I' [B_{,k} (c^{-1})_{i,j}^j - B_{,i} (c^{-1})_{k,j}^j] = 0,$$

so either I is constant, or there exists a scalar  $E$  such that

$$(c^{-1})_{i,j}^j = E B_{,i}. \quad (2.10)$$

In order that  $a_{ik}^4$  be symmetric, (2.9) and (2.10) must hold when I or II is constant, so these conditions hold generally. For the anti-symmetric part of  $a_{ik}^2$  to vanish,  $c_{i,j}^j$  must be the gradient of a scalar. This condition, together with (2.8), implies that  $D = D(B)$ . Similarly, the symmetry of  $a_{ik}^1$  requires that  $E = E(B)$ .

Now  $c_j^i$  and  $(c^{-1})_j^i$  can be written in the form

$$c_j^i = c_1 a^i a_j + c_2 b^i b_j + c_3 c^i c_j, \quad (2.11)$$

$$(c^{-1})_j^i = \frac{1}{c_1} a^i a_j + \frac{1}{c_2} b^i b_j + \frac{1}{c_3} c^i c_j, \quad (2.12)$$

where  $a^i$ ,  $b^i$ , and  $c^i$  are mutually orthogonal unit eigenvectors of  $c_j^i$ . It follows from (2.8) that we may take

$$a_i = \frac{B_{,i}}{\sqrt{B_{,k} B_{,k}}}. \quad (2.13)$$

Also, since  $a^i$ ,  $b^i$ , and  $c^i$  are mutually orthogonal unit vectors,

$$\delta_j^i = a^i a_j + b^i b_j + c^i c_j. \quad (2.14)$$

From equations (2.11) to (2.14),

$$c_{ij} = (c_1 - c_3) \frac{B_{,i} B_{,j}}{B_{,k} B_{,k}} + (c_2 - c_3) b_i b_j + c_3 g_{ij}, \quad (2.15)$$

$$(c^{-1})^{ij} = \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3} \right) \frac{B_{,i} B_{,j}}{B_{,k} B_{,k}} + \left( \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3} \right) b^i b^j + \frac{1}{c_3} g^{ij}. \quad (2.16)$$

Substituting the expression for  $c_{ij}$  given by (2.15) into (2.9) and using the fact that  $B_{,i}$  and  $b_i$  are orthogonal, we obtain

$$(c_1 - c_3) \left( \frac{B_{,i} B_{,j}}{B_{,k} B_{,k}} \right)_{,i} + (c_2 - c_3) (b^i b^j)_{,i} = (D - c'_1) B^{,j},$$

while (2.10) and (2.16) yield

$$\left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3} \right) \left( \frac{B_{,i} B_{,j}}{B_{,k} B_{,k}} \right)_{,i} + \left( \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3} \right) (b^i b^j)_{,i} = \left[ E - \left( \frac{1}{c_1} \right)' \right] B^{,j}.$$

In order that these equations hold simultaneously, we must have

$$\left( \frac{B_{,i} B_{,j}}{B_{,k} B_{,k}} \right)_{,i} = F(B) B^{,j} \quad \text{if } c_1 \neq c_3, \quad (b^i b^j)_{,i} = G(B) B^{,j} \quad \text{if } c_2 \neq c_3,$$

where  $F$  and  $G$  are rational functions of  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $D$ ,  $E$ , and  $c'_1$ .

To recapitulate, we have shown that, if I and II are not both constant, the following conditions must be satisfied:

$$c_1 = c_1(B), \quad c_2 = c_2(B), \quad c_3 = c_3(B), \quad (2.17)$$

$$c_1 c_2 c_3 = 1, \quad (2.18)$$

$$b_i b^i = 1, \quad (2.19)$$

$$B_{,i} b^i = 0, \quad (2.20)$$

$$\begin{pmatrix} B^{,i} B_{,i} \\ B^{,k} B_{,k} \end{pmatrix}_{,i} = F(B) B^{,i} \quad \text{if } c_1 \neq c_3, \quad (2.21)$$

$$(b^i b^j)_{,i} = G(B) B^{,i} \quad \text{if } c_2 \neq c_3, \quad (2.22)$$

Also,  $\|c_{ij}\|$  must be positive definite. If these conditions are satisfied, the tensors  $c_{ij}$  and  $(c^{-1})^{ij}$  given by (2.15) and (2.16) are such that each of the tensors  $a_{ik}^1, \dots, a_{ik}^9$  is symmetric. Furthermore, (1.4) is satisfied.

If I and II are both constant, we can not be sure that these equations must hold. If they do, it follows from the analysis made in the following sections that  $c_{ij}$  is a constant tensor. It seems very likely that a deformation for which I, II, and  $|c_j^i|$  are constant must necessarily be homogeneous, so that  $c_{ij}$  is a constant tensor. Certainly one can always determine a homogeneous deformation for which I, II, and  $|c_j^i|$  take on prescribed values, provided only that these values be consistent with the requirement that  $\|c_{ij}\|$  be positive definite. It would be of some interest to prove a general theorem from which the result conjectured here follows as a special case, namely that the invariants I, II, and  $|c_j^i|$  determine the deformation to within a rigid motion of the material as a whole. It is well known that, if these invariants are equal for two tensors  $\mathbf{c} = \|c_{ij}\|$  and  $\bar{\mathbf{c}} = \|\bar{c}_{ij}\|$ , then there exists an orthogonal matrix  $\mathbf{a}$  such that  $\mathbf{c} = \mathbf{a}^{-1} \bar{\mathbf{c}} \mathbf{a}$  [8]. The difficulty arises in showing that, if  $\mathbf{c}$  and  $\bar{\mathbf{c}}$  satisfy (1.9), then  $\mathbf{a}$  is constant.

Since solutions corresponding to deformations for which  $c_{ij}$  is constant are discussed in [1] and [2], we shall not discuss them here.

### 3. Remarks Concerning Solutions of Equations (2.19) to (2.22)

From (2.13) and (2.21),

$$a_{,i}^i a^j + a_{,i}^j a^i = F \sqrt{B^{,k} B_{,k}} a^j,$$

so  $a^j$  and  $a_{,i}^j a^i$  are linearly dependent. But, since  $a^i$  is a unit vector,  $a^j$  and  $a_{,i}^j a^i$  are perpendicular, hence linearly independent unless

$$a_{,i}^j a^i = 0. \quad (3.1)$$

Thus

$$a_{,i}^i = F \sqrt{B^{,k} B_{,k}}. \quad (3.2)$$

Equations (2.13) and (3.1) yield

$$(B^{,i} B_{,i})_{,j} = 2 (B^{,i} B_{,i})^{-1} (B^{,k} B_{,kl} B^{,l}) B_{,j},$$



from which it follows that  $B^{,k} B_{,k}$  is a function of  $B$ ,  $\sqrt{B^{,k} B_{,k}} = H(B)$ . Then (3.2) becomes

$$a^i_{,i} = F H. \quad (3.3)$$

Also,

$$a_{i,j} = \left( \frac{B_{,i}}{H} \right)_{,j} = \frac{B_{,ij}}{H} - B_{,i} B_{,j} \frac{H'}{H^2} = a_{i,j}. \quad (3.4)$$

Taking the divergence of (3.1), then using (3.3) and (3.4), we obtain

$$(a^j_{,i} a^i)_{,j} = a^j_{,ij} a^i + a^i_{,i} a^i_{,j} = (F H)' H + a^i_{,i} a_{i,j} = 0. \quad (3.5)$$

We assert that the surfaces  $B = \text{const}$  are surfaces of constant mean and Gaussian curvature. The constancy of the mean curvature follows from (3.3) and the fact that  $\pm a^i_{,i}$  is the mean curvature [9]. The Gaussian curvature is given by<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{2} [(a^i_{,i})^2 - a^i_{,i} a_{i,j} - a^i_{,j} a^j_{,i} a^k_{,k}], \quad (3.6)$$

which, by (3.1), (3.3), and (3.5) is a function of  $B$ , so the assertion is proved.

Suppose the mean and Gaussian curvatures of a surface  $S$  are constant. Then the principal curvatures  $1/\varrho_1$  and  $1/\varrho_2$  of  $S$  are constant<sup>2)</sup>. Introduce surface coordinates  $(u^1, u^2)$  such that the coordinate curves are lines of curvature. Then, on  $S$ , the metric tensor  $\mathbf{g}$  and second fundamental tensor  $\mathbf{d}$  are of the form

$$\mathbf{g} = \begin{vmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{vmatrix} \frac{g_{11}}{\varrho_1} & 0 \\ 0 & \frac{g_{22}}{\varrho_2} \end{vmatrix},$$

and the Mainardi-Codazzi relations become

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) \frac{\partial \log g_{11}}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial u^1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \frac{\partial \log g_{22}}{\partial u^1} &= 0. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> That (3.6) gives the Gaussian curvature of a surface with unit normal  $a^i$  can be seen by taking the equation of the surface in the form  $z - f(x, y) = 0$ , where  $(x, y, z)$  are rectangular Cartesian coordinates, and using the fact that

$$a_x = \mp \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad a_y = \mp \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad a_z = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

where  $p = \partial f / \partial x$ ,  $q = \partial f / \partial y$ . The expression (3.6) then reduces to the well known form

$$\frac{r t - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad \text{where } r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

<sup>2)</sup> The equations and theorems of differential geometry used in this discussion may be found in [10], pp. 150, 217–221, 225, 228–230.



where  $v = \sqrt{B_{,k} B_{,k}}$  is the speed. Consider the problem of determining all flows of this type for which the speed is constant over the equipotential surfaces,  $v = v(B)$ . Then (3.10) reduces to

$$\left( \frac{B_{,i} B_{,j}}{B_{,k} B_{,k}} \right)_{,i} = - \frac{v'}{v} \left( 1 + v^2 \frac{d\rho}{dp} \right) B_{,i}.$$

But, from (3.8) and (3.9),  $\rho$  and  $p$  are functions of  $v$ , hence of  $B$ , so

$$- \frac{v'}{v} \left( 1 + v^2 \frac{d\rho}{dp} \right) = F(B).$$

Thus the equipotential surfaces are concentric spheres, parallel planes, or concentric circular cylinders. Since these flows are well known, we shall not discuss them further.

Let us now consider (2.19), (2.20), and (2.22). From (2.22),

$$b_{i,i} b^i + b_{,i}^i b^i = G(B) B_{,i}. \quad (3.11)$$

Multiplying (3.11) by  $b_j$ , summing on  $j$ , then using (2.19) and (2.20), we obtain

$$b_{,i}^i = 0, \quad (3.12)$$

so that

$$b_{j,i} b^i = (b_{j,i} - b_{i,j}) b^i = \left( \frac{\partial b_j}{\partial x^i} - \frac{\partial b_i}{\partial x^j} \right) b^i = P_{,j}, \quad (3.13)$$

where  $P = \int G dB$ . But (3.12) and (3.13) are the equations governing the steady motion of a fluid of unit density, subject to no body force, if  $b_i$  be interpreted as the velocity vector,  $P$  the pressure. By (2.19) the speed is constant. Suppose there exists a family of surfaces  $\psi = \text{const}$  to which  $b_i$  is normal. Then, by PRIM's generalization [11] of a result due to HAMEL [12],  $\psi = \psi(a\theta + bz)$ , where  $a$  and  $b$  are constants and  $(r, \theta, z)$  are cylindrical coordinates. From (2.19),  $b_i$  is a unit vector, so

$$b_i = \pm \frac{\psi_{,i}}{\sqrt{\psi_{,k} \psi_{,k}}}.$$

Thus

$$b_r = 0, \quad b_\theta = \pm \frac{a r}{\sqrt{a^2 + b^2 r^2}}, \quad b_z = \pm \frac{b r}{\sqrt{a^2 + b^2 r^2}}. \quad (3.14)$$

Equation (2.20) then yields

$$a \frac{\partial B}{\partial \theta} + b r^2 \frac{\partial B}{\partial z} = 0,$$

so that

$$B = B(r, a z - b r^2 \theta). \quad (3.15)$$

Since this result does not hold unless there exists a family of surfaces to which  $b_i$  is normal, we shall not use it when a more general analysis can be made.

#### 4. The Case where the Eigenvalues of $c_{ij}$ are Distinct

When the eigenvalues of  $c_{ij}$  are all distinct, (2.21), (3.12), and (3.13) hold. As was shown in section 3, the surfaces  $B = \text{const}$  are then concentric spheres, parallel planes, or concentric circular cylinders. Suppose they are concentric spheres and choose a spherical coordinate system  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \varphi$  in which  $B = B(r)$ . From (2.20),

$$B_{,i} b^i = B_{,r} b^r = 0,$$

so  $b^r = 0$ . From (2.19)

$$g^{ij} b_i b_j = \frac{b_\theta^2}{r^2} + \frac{b_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} = 1.$$

We thus have

$$b_r = 0, \quad b_\theta = r \cos \psi_1, \quad b_\varphi = r \sin \theta \sin \psi_1, \quad (4.1)$$

where  $\psi_1$  is some function of the coordinates. Equations (3.12) and (4.11) yield

$$b_{,i}^i = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial \sin \theta \cos \psi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \sin \psi_1}{\partial \varphi} \right] = 0. \quad (4.2)$$

From (3.13) and (4.1)

$$\left( \frac{\partial b_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial b_\varphi}{\partial \theta} \right) b^\varphi = \left( \frac{\partial b_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial b_\varphi}{\partial \theta} \right) b^\theta = 0,$$

so

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial b_\varphi}{\partial \theta} = r \left[ \frac{\partial \cos \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sin \theta \sin \psi_1}{\partial \theta} \right] = 0. \quad (4.3)$$

Now (4.2) and (4.3) require that

$$\cos \psi_1 \left( \cos \theta + \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right) - \sin \psi_1 \sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = 0,$$

$$\sin \psi_1 \left( \cos \theta + \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right) + \cos \psi_1 \sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = 0.$$

For these equations to be satisfied simultaneously, we must have

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} = -\cos \theta.$$

Since these equations admit no solution, this case cannot occur.

We next consider the case where the surfaces  $B = \text{const}$  are parallel planes and introduce a rectangular Cartesian coordinate system  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  in which  $B = B(x)$ . By an analysis similar to that given above, we find that

$$b_x = 0, \quad b_y = \cos \psi_2, \quad b_z = \sin \psi_2, \quad (4.4)$$



where  $\psi_2 = \psi_2(x)$ . Using (2.15) to (2.18) and (4.4) to calculate  $c_{ij}$  and  $(c^{-1})^{ij}$ , we find that

$$\begin{aligned} \|\bar{c}_{ij}\| &= \begin{vmatrix} \overline{HK - J^2} & 0 & 0 \\ 0 & H & J \\ 0 & J & K \end{vmatrix}, \\ \|(c^{-1})^{ij}\| &= \begin{vmatrix} \overline{HK - J^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K}{\overline{HK - J^2}} & \frac{-J}{\overline{HK - J^2}} \\ 0 & \frac{-J}{\overline{HK - J^2}} & \frac{H}{\overline{HK - J^2}} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

where

$$H = (c_2 - c_3) \cos^2 \psi_2 + c_3,$$

$$J = (c_2 - c_3) \cos \psi_2 \sin \psi_2,$$

$$K = (c_2 - c_3) \sin^2 \psi_2 + c_3,$$

are functions of  $x$ . Making these substitutions in (1.9), we obtain, after some simplification,

$$H'' = J'' = K'' = 0, \quad J'^2 = H' K',$$

where primes denote differentiation with respect to  $x$ . Thus

$$H = a_1 x + a_2, \quad J = a_3 x + a_4, \quad K = a_5 x + a_6,$$

$$HK - J^2 = (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) x + a_2 a_6 - a_4^2,$$

where the  $a$ 's are constants such that

$$a_3^2 = a_1 a_5. \quad (4.6)$$

We exclude the case where  $c_{ij}$  is a constant tensor, that is where  $a_1 = a_3 = a_5 = 0$ . We now introduce a rectangular Cartesian coordinate system  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  such that

$$x = \bar{x} + \lambda, \quad y = \bar{y} \cos \mu + \bar{z} \sin \mu, \quad z = -\bar{y} \sin \mu + \bar{z} \cos \mu,$$

where

$$\lambda = \frac{a_1^2 - a_2 a_6}{a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4}, \quad \tan \mu = -\frac{a_3}{a_1} \quad \text{if } a_1 \neq 0, \quad \mu = \frac{\pi}{2} \quad \text{if } a_1 = 0.$$

This transformation is not defined if

$$a_1 a_6 + a_2 a_5 = 2 a_3 a_4. \quad (4.7)$$

If (4.7) holds, then by (4.6) and (4.7)

$$a_1^2 a_3^2 + 2 a_3^2 (a_2 a_6 - a_4^2) + a_2^2 a_5^2 = 0. \quad (4.8)$$

Since  $\|c_{ij}\|$  must be positive definite,  $HK - J^2 > 0$ , so that, in this case,  $a_2 a_6 > a_4^2$ . Thus each of the three terms in (4.8) is nonnegative and  $a_2 a_6 \neq 0$ . Thus  $a_1 = a_3 = a_5 = 0$ , a possibility which we have excluded, so the transformation is defined. Transforming  $c_{ij}$  and  $(c^{-1})^{ij}$  to this new coordinate system, and dropping the bars on the variables, we obtain

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{b_1 b_4 x} & 0 & 0 \\ 0 & b_1 x + b_2 & b_3 \\ 0 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\|(c^{-1})^{ij}\| = \begin{vmatrix} b_1 b_4 x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_1 x} & \frac{-b_3}{b_1 b_4 x} \\ 0 & \frac{-b_3}{b_1 b_4 x} & \frac{b_1 x + b_2}{b_1 b_4 x} \end{vmatrix}, \quad (4.10)$$

where the  $b$ 's are constants such that  $b_2 b_4 = b_3^2$ . In order that  $\|c_{ij}\|$  be positive definite, it is necessary and sufficient that

$$b_4 > 0, \quad b_1 x > 0.$$

From (1.7), (4.9), and (4.10),

$$I = b_1 b_4 x + \frac{b_1 x + b_2 + b_4}{b_1 b_4 x}, \quad II = b_1 x + b_2 + b_4 + \frac{1}{b_1 b_4 x}.$$

Equations (2.1), (4.9), and (4.10) then yield  $\partial p / \partial y = \partial p / \partial z = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \cdot \frac{db_1 b_4 x}{dx} + 2 \left( \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I^2} \cdot \frac{dI}{dx} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I \partial II} \cdot \frac{dII}{dx} \right) b_1 b_2 x \\ &\quad - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{b_1 b_4 x} - 2 \left( \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I \partial II} \cdot \frac{dI}{dx} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial II^2} \cdot \frac{dII}{dx} \right) \frac{1}{b_1 b_4 x} \\ &= 2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \Sigma}{\partial I} b_1 b_4 x - \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \cdot \frac{1}{b_1 b_4 x} \right], \end{aligned}$$

so

$$\dot{p} = \dot{p}_0 + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} b_1 b_4 x - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \cdot \frac{1}{b_1 b_4 x},$$

where  $p_0$  is an arbitrary constant. Using (1.3) to calculate the stresses, we obtain

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= -p_0, \quad t_{xy} = t_{xz} = 0, \\ t_{yy} &= -p_0 + 2 \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial I} b_4 + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right) \left( \frac{1}{b_1 b_4 x} - b_1 x \right) - 2 b_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II}, \\ t_{yz} &= -2 b_3 \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \cdot \frac{1}{b_1 b_4 x} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \\ t_{zz} &= -p_0 + 2 \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial I} b_1 x + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right) \left( \frac{1}{b_1 b_4 x} - b_4 \right) + 2 \frac{b_2}{b_1 b_4 x} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial I}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Equations (4.9) and (4.11) constitute a general solution to the equations of this theory. In order to gain a better understanding of this solution, we shall determine a deformation compatible with (4.9). It is convenient to take the coordinates  $X^\alpha$  to be cylindrical,  $X^1 = R$ ,  $X^2 = \Theta$ ,  $X^3 = Z$ . Then, by (1.5) and (4.9),

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + R^2 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 &= \frac{1}{b_1 b_4 x}, \\ \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial R}{\partial y} + R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial R}{\partial z} + R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} &= 0, \\ \left( \frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 + R^2 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 &= b_1 x + b_2, \\ \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{\partial R}{\partial z} + R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} &= b_3 = \pm \sqrt{b_2 b_4}, \\ \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 + R^2 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial z} \right)^2 &= b_4. \end{aligned}$$

These equations are satisfied if

$$R = 2 \sqrt{\frac{x}{b_1 b_4}}, \quad \Theta = b_1 \sqrt{b_4} \frac{y}{2}, \quad Z = \pm \sqrt{b_2} y + \sqrt{b_4} z,$$

from which

$$x = b_1 b_4 \frac{R^2}{4}, \quad y = \frac{2 \Theta}{b_1 \sqrt{b_4}}, \quad z = \frac{Z}{\sqrt{b_4}} \mp 2 \sqrt{b_2} \frac{\Theta}{b_1 b_4}. \quad (4.12)$$

The orientation of the cylindrical system with respect to the Cartesian system can be assigned arbitrarily. Changing this orientation is mathematically equivalent to subjecting the material to a rigid motion before deforming it. The deformation (4.12) can be described as follows: We start with a portion of a

right circular cylinder bounded by the surfaces

$$R = R_1, \quad R = R_2, \quad \Theta = \pm \Theta_0, \quad Z = \pm Z_0.$$

This solid is first deformed into a rectangular parallelepiped bounded by the planes

$$x = x_1 = b_1 \frac{R_1^2}{4}, \quad x = x_2 = b_1 \frac{R_2^2}{4}, \quad y = \pm y_0 = \pm 2 \frac{\Theta_0}{b_1}, \quad z = \pm Z_0.$$

The latter solid is then subjected to a simple extension in the direction of the  $x$ -axis which deforms it into the rectangular parallelepiped

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x}_1 = b_4 x_1, & x &= \bar{x}_2 = b_4 x_2, \\ y &= \pm \bar{y}_0 = \pm \frac{y_0}{\sqrt{b_4}}, & z &= \pm \bar{z}_0 = \pm \frac{Z_0}{\sqrt{b_4}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

so  $b_4$  is the extension ratio, measured from the position occupied by the body after the first deformation. Finally, it is subjected to a simple shearing deformation which deforms it into the solid bounded by the planes

$$x = \bar{x}_1, \quad x = \bar{x}_2, \quad y = \pm \bar{y}_0,$$

and

$$z = \pm \bar{z}_0 - \sqrt{\frac{b_2}{b_4}} y \quad \text{if } b_3 > 0, \quad z = \pm \bar{z}_0 + \sqrt{\frac{b_2}{b_4}} y \quad \text{if } b_3 < 0.$$

Thus  $\sqrt{b_2/b_4}$  is a measure of the amount of shear.

We must now consider the case where the surfaces  $B = \text{const}$  are concentric circular cylinders. It is convenient to introduce a cylindrical coordinate system  $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = z$  in which  $B = B(r)$ . By an analysis similar to that employed in discussing the case where the surfaces  $B = \text{const}$  are concentric spheres, we obtain

$$b_r = 0, \quad b_\theta = r \cos \psi_3, \quad b_z = \sin \psi_3, \quad (4.14)$$

where  $\psi_3$  is a solution of the equations

$$-\sin \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} + r \cos \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0, \quad \cos \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} + r \sin \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0.$$

As is easily verified, these equations are satisfied if and only if  $\psi_3 = \psi_3(r)$ .



Using (2.15) to (2.18) and (4.14) to calculate  $c_{ij}$  and  $(c^{-1})^{ij}$ , we obtain

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{r^2}{L N - M^2} & 0 & 0 \\ 0 & L & M \\ 0 & M & N \end{vmatrix},$$

$$\|(c^{-1})^{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{L N - M^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{L N - M^2} & \frac{-M}{L N - M^2} \\ 0 & \frac{-M}{L N - M^2} & \frac{L}{L N - M^2} \end{vmatrix},$$

where

$$L = [(c_2 - c_3) \cos^2 \psi_3 + c_3] r^2,$$

$$M = (c_2 - c_3) r \sin \psi_3 \cos \psi_3,$$

$$N = (c_2 - c_3) \sin^2 \psi_3 + c_3,$$

are functions of  $r$ . Making these substitutions in (1.9), we obtain, after some simplification,

$$L'' = \frac{L'}{r}, \quad M'' = \frac{M'}{r}, \quad N'' = \frac{N'}{r}, \quad (M')^2 = L' M',$$

where primes denote differentiation with respect to  $r$ . Thus

$$L = a_1 r^2 + a_2, \quad M = a_3 r^2 + a_4, \quad N = a_5 r^2 + a_6,$$

$$L N - M^2 = (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) r^2 + a_2 a_6 - a_4^2,$$

where the  $a$ 's are constants such that

$$a_3^2 = a_1 a_5. \quad (4.15)$$

For  $\|c_{ij}\|$  to be positive definite, it is necessary and sufficient that

$$a_1 r^2 + a_2 > 0, \quad (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) r^2 + a_2 a_6 - a_4^2 > 0. \quad (4.16)$$

Suppose first that

$$a_1 a_6 + a_2 a_5 = 2 a_3 a_4. \quad (4.17)$$

Then from (4.16),

$$a_2 a_6 > a_4^2. \quad (4.18)$$

Squaring both sides of (4.17), then using (4.15), we obtain

$$a_1^2 a_6^2 + 2 (a_2 a_6 - a_4^2) a_3^2 + a_2^2 a_6^2 = 0.$$

By (4.18), each term in this expression is non negative and  $a_2 a_6 \neq 0$ . Thus  $a_1 = a_3 = a_5 = 0$ . Furthermore, by (4.16),  $a_2 > 0$ ,  $a_6 > 0$ . Thus there exist real constants  $b_1, b_2, b_3$  such that

$$b_1 = \sqrt{a_2 a_6 - a_4^2}, \quad b_2 = \sqrt{\frac{a_6}{a_2 a_6 - a_4^2}}, \quad b_3 = \frac{a_4}{a_6}.$$

It then follows that

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{r^2}{b_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_2^2} & b_1^2 b_2^2 b_3 \\ 0 & b_1^2 b_2^2 b_3 & b_1^2 b_2^2 \end{vmatrix}, \quad (4.19)$$

$$\|(c^{-1})^{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{b_1^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & b_2^2 & -b_2^2 b_3 \\ 0 & -b_2^2 b_3 & \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_1^2 b_2^2} \end{vmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\text{I} = \frac{b_1^2}{r^2} + r^2 b_2^2 + \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_1^2 b_2^2}, \quad \text{II} = \frac{r^2}{b_1^2} + \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_2^2 r^2} + b_1^2 b_2^2.$$

Equation (2.1) then yields  $\partial p / \partial \theta = \partial p / \partial z = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} = & 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \frac{b_1^2}{r^2} + 2 \left( \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \text{I}^2} \cdot \frac{d\text{I}}{dr} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \text{I} \partial \text{II}} \cdot \frac{d\text{II}}{dr} \right) \frac{b_1^2}{r^2} \\ & - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \frac{r^2}{b_1^2} - 2 \left( \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \text{I} \partial \text{II}} \cdot \frac{d\text{I}}{dr} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \text{II}^2} \cdot \frac{d\text{II}}{dr} \right) \frac{r^2}{b_1^2} \\ & + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} \cdot \frac{1}{r} \left( \frac{b_1^2}{r^2} - r^2 b_2^2 \right) - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \cdot \frac{1}{r} \left( \frac{r^2}{b_1^2} - \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{r^2 b_2^2} \right) \\ = & \frac{d}{dr} \left[ 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} \cdot \frac{b_1^2}{r^2} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \cdot \frac{r^2}{b_1^2} - \Sigma \right], \end{aligned}$$

so

$$p = p_0 + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} \cdot \frac{b_1^2}{r^2} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \cdot \frac{r^2}{b_1^2} - \Sigma, \quad (4.21)$$

where  $p_0$  is a constant. Using (1.3), (4.19), (4.20), and (4.21), we can compute the stresses. The physical components of the stress tensor are found to be

given by

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= \Sigma - p_0, \quad \widehat{r\theta} = 0, \quad \widehat{rz} = 0, \\ \widehat{\theta\theta} &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \left( b_2^2 r^2 - \frac{b_1^2}{r^2} \right) - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \left( \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_2^2 r^2} - \frac{r^2}{b_1^2} \right) + \Sigma - p_0, \\ &= \frac{d}{dr} r (\Sigma - p_0), \\ \widehat{\theta z} &= -2 b_2^2 b_3 r \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{b_1^2}{r^2} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \\ \widehat{zz} &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \left( \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_1^2 b_2^2} - \frac{b_1^2}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \left( \frac{r^2}{b_1^2} - b_1^2 b_2^2 \right) + \Sigma - p_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

If we choose the coordinates  $X^\alpha$  to be rectangular Cartesian,  $X^1 = X$ ,  $X^2 = Y$ ,  $X^3 = Z$ , we may write a deformation corresponding to (4.19) in the form

$$r = \sqrt{2 b_1 X}, \quad \theta = b_2 Y, \quad z = \frac{Z}{b_1 b_2} - b_2 b_3 Y.$$

This deformation can be decomposed into two parts: we start with a rectangular parallelepiped bounded by the planes  $X = X_1$ ,  $X = X_2$ ,  $Y = \pm Y_0$ ,  $Z = \pm Z_0$ . This solid is then deformed into the solid bounded by the circular cylinders

$$r = r_1 = \sqrt{2 b_1 X_1}, \quad r = r_2 = \sqrt{2 b_1 X_2},$$

and the planes

$$\theta = \pm \theta_0 = \pm b_2 Y_0, \quad z = \pm z_0 = \pm \frac{Z_0}{b_1 b_2}.$$

A solution corresponding to this part of the deformation is discussed in some detail in [4], where it is shown that, if the bending is to be accomplished by terminal couples, the constants  $b_1$ ,  $b_2$ , and  $p_0$  should be chosen so that

$$b_1 = \pm b_2 r_1 r_2, \quad p_0 = \Sigma(r_1). \quad (4.23)$$

In the present case, the bending deformation described above is followed by a deformation which carries the body into the solid bounded by the cylindrical surfaces  $r = r_1$  and  $r = r_2$ , the planes  $\theta = \pm \theta_0$  and the helical surfaces  $z + b_3 \theta = \pm z_0$ . By (4.22), the surfaces  $r = r_1$  and  $r = r_2$  are subject to normal stresses only, the planes  $\theta = \pm \theta_0$  to a shearing stress in the direction of the  $z$ -axis and a normal stress, the helical surfaces to a normal stress and a shearing stress in the direction of the helices obtained by intersecting these surfaces with the cylinders  $r = \text{const}$ . One can always choose  $p_0$  so that the surface  $r = r_1$  is free of stress. Suppose this is done and that  $b_1$  and  $b_2$  are chosen in accordance

with (4.23), so that  $I(r_1) = I(r_2)$ . Consider a neo-Hookean material, that is, a material for which  $\Sigma = \alpha (I - 3)$ , where  $\alpha$  is a constant. In this case the surface  $r = r_2$  is free of stress and the resultant normal force acting on the planes  $\theta = \pm \theta_0$ ,

$$N = 2 z_0 \int_{r_1}^{r_2} \theta \widehat{\theta} \, dr = 2 z_0 r (\Sigma - p_0) \Big|_{r_1}^{r_2},$$

vanishes. For a general form of the strain energy, these conditions are not satisfied. In general, these will be normal forces acting on these surfaces. If these are not supplied, the material will tend to expand or contract in these directions when the latter part of the deformation is effected.

Suppose now that (4.17) does not hold. If  $a_1 (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) < 0$ , then from (4.15) and (4.16),

$$\begin{aligned} (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) r^2 &< - \left( \frac{a_2}{a_1} \right) (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) \\ &= a_4^2 - a_2 a_6 - a_4^2 + \frac{2 a_2 a_3 a_4}{a_1} - \frac{a_2^2 a_5}{a_1} \\ &\leq a_4^2 - a_2 a_6 - a_4^2 + 2 |a_2 a_4| \sqrt{\frac{a_5}{a_1}} - \frac{a_2^2 a_5}{a_1} \\ &= a_4^2 - a_2 a_6 - \left[ |a_4| - |a_2| \sqrt{\frac{a_5}{a_1}} \right]^2 \\ &\leq a_4^2 - a_2 a_6, \end{aligned}$$

which contradicts (4.16). Thus  $a_1 (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) \geq 0$ . Similarly,  $a_5 (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) \geq 0$ . Using these conditions, it is easy to show that there exist real constant  $b_1, \dots, b_6$  such that

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4, & b_1 b_3 b_5 &= -a_3, \\ b_1 b_2 &= a_4^2 - a_2 a_6, & b_1 b_2 b_3 b_4 &= a_4, \\ b_1 b_3^2 &= a_1, & b_1 b_5^2 &= a_5, \\ b_1^2 b_4^2 - b_1 b_2 b_3^2 &= a_2, & b_1^2 b_6^2 - b_1 b_2 b_5^2 &= a_6. \end{aligned}$$

In terms of these,

$$c_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{r^2}{b_1 (r^2 - b_2)} & 0 & 0 \\ 0 & b_1 [b_1 b_4^2 + b_3^2 (r^2 - b_2)] & -b_1 [b_1 b_4 b_6 + b_3 b_5 (r^2 - b_2)] \\ 0 & -b_1 [b_1 b_4 b_6 + b_3 b_5 (r^2 - b_2)] & b_1 [b_1 b_6^2 + b_5^2 (r^2 - b_2)] \end{vmatrix}.$$



The solution corresponding to these strains is discussed in [6], where it is shown that deformations corresponding to (4.24) are possible not only in all isotropic incompressible materials, but in all incompressible materials possessing transverse isotropy.<sup>1)</sup>

### 5. The Case where $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_3$

If  $c_2 = c_3$  and  $c_1 = c_3$ , then by (2.18),  $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ , so the material is unstrained. If  $c_2 = c_3$ , but  $c_1 \neq c_3$ , (2.21) holds, so the results obtained in section 3 apply. Thus the surfaces  $B = \text{const}$  are parallel planes, concentric circular cylinders or concentric spheres. Furthermore, from (2.15) and (2.16),

$$c_{ij} = (c_1 - c_3) \frac{B_{,i} B_{,j}}{B_{,k} B_{,k}} + c_3 g_{ij}, \quad (c^{-1})^{ij} = \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3} \right) \frac{B^{,i} B^{,j}}{B^{,k} B^{,k}} + \frac{1}{c_3} g^{ij}, \quad (5.1)$$

where

$$c_1 c_3^2 = 1. \quad (5.2)$$

Suppose first that the surfaces  $B = \text{const}$  are parallel planes and introduce a rectangular Cartesian coordinate system  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  in which  $B = B(x)$ . Then from (2.17), (5.1), and (5.2),

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{c_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix},$$

where  $c_3 = c_3(x)$ . Since this is a special case of (4.5), we obtain no new solutions here. Similarly, no new solutions are obtained in the case where the surfaces  $B = \text{const}$  are concentric circular cylinders. Suppose they are concentric spheres and introduce a spherical coordinate system  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \varphi$  in which  $B = B(r)$ . Then (2.17), (5.1), and (5.2) yield

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{c_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & c_3 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix}, \quad \|(c^{-1})^{ij}\| = \begin{vmatrix} c_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_3 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_3 r^2 \sin^2 \theta} \end{vmatrix},$$

where  $c_3 = c_3(r)$ . Making these substitutions in (1.9), we obtain

$$c_3 [(c_3 r^2)']^2 = 4 r^2,$$

<sup>1)</sup> Note added in Proof: The bending solutions discussed in [13] are included among those given by (4.22) and (4.24).

from which  $c_3 = r^{-2} (r^3 + a)^{2/3}$ , where  $a$  is a constant. Taking the coordinates  $X^\alpha$  to be spherical,  $X^1 = R$ ,  $X^2 = \Theta$ ,  $X^3 = \Phi$ , we may then write a corresponding deformation in the form

$$r = (\pm R^3 - a)^{1/3}, \quad \theta = \pm \Theta, \quad \varphi = \Phi.$$

A solution corresponding to one of these deformations is discussed in [5].

## 6. The Case where $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_3$

Since there is no essential difference between the cases  $c_1 = c_3$  and  $c_1 = c_2$ , we shall consider only the former, assuming that  $c_1 \neq c_2$ . Then, from (2.15), (2.16), and (2.18),

$$c_{ij} = (c_2 - c_3) b_i b_j + c_3 g_{ij}, \quad (c^{-1})^{ij} = \left( \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3} \right) b^i b^j + \frac{1}{c_3} g^{ij}, \quad (6.1)$$

where

$$c_2 c_3^2 = 1. \quad (6.2)$$

We restrict our attention to the case where there exists a family of surfaces to which  $b_i$  is normal so that (3.14) and (3.15) hold. Let us first consider the case where  $b = 0$ , so that  $B = B(r, z)$ . From (2.17), (3.14), (6.1), and (6.2), we obtain

$$\begin{aligned} \|c_{ij}\| &= \begin{vmatrix} e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^\lambda \end{vmatrix}, \\ \|(c^{-1})^{ij}\| &= \begin{vmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{2\lambda}}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

where  $\lambda = \lambda(r, z) = \log c_3$ . From the conditions of compatibility (1.9), we obtain

$$2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r \partial z} = 3 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} = 0, \quad (6.5)$$

$$2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} = 3 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right)^2 - \frac{5}{r} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2, \quad (6.6)$$

$$2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} = 3 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right)^2. \quad (6.7)$$

In order that these equations hold simultaneously,  $\lambda$  must be constant. If  $\partial\lambda/\partial z = 0$ , this follows immediately from (6.5) and (6.7). Suppose  $\partial\lambda/\partial z \neq 0$ . Adding (6.6) and (6.7) and using (6.5), we obtain

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 = \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial r}. \quad (6.8)$$

Differentiating (6.8) with respect to  $z$ , then using (6.4), (6.7), and (6.8), we obtain

$$\frac{7}{r} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial r} - \frac{3}{r^2} - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)^2 = 0, \quad (6.9)$$

from which  $\partial^2\lambda/(\partial r \partial z) = 0$ . But from (6.4), we must then have  $\partial\lambda/\partial r = -1/r$ , which does not satisfy (6.9). Thus  $\lambda$  must be constant. It then follows from (6.3) that  $c_{ij}$  is a constant tensor.

Next assume that  $a = 0$ . We may then introduce a rectangular Cartesian coordinate system  $(x, y, z)$  in which

$$b_x = 0, \quad b_y = 0, \quad b_z = 1, \quad B = B(x, y).$$

From (2.17), (6.1), and (6.2) we then obtain

$$\|c_{ij}\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{P} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{P} & 0 \\ 0 & 0 & P^2 \end{array} \right\|, \quad \|(c^{-1})^{ij}\| = \left\| \begin{array}{ccc} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{P^2} \end{array} \right\|,$$

where  $P = P(x, y) = 1/c_3$ . Setting  $R_{zzzz} = 0$  in (1.9), we obtain

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2,$$

while  $R_{yyyz} = 0$  requires that

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2.$$

Using these conditions and the equation  $R_{xyxy} = 0$ , one can easily show that  $P$  must be constant. Thus  $c_{ij}$  is a constant tensor.

Suppose now that  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , and introduce a curvilinear coordinate system  $(\xi, \eta, \zeta)$  such that

$$r = \xi, \quad \theta = \frac{a\xi - b\eta}{a^2 + b^2\zeta^2}, \quad z = \frac{b\xi\zeta^2 + a\eta}{a^2 + b^2\zeta^2}.$$

In this coordinate system,  $B = B(\eta, \zeta)$ ,

$$\|g_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{\zeta^2}{a^2 + b^2 \zeta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 + b^2 \zeta^2} & 2b\zeta \frac{a\xi - b\eta}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^2} \\ 0 & 2b\zeta \frac{a\xi - b\eta}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^2} & 1 + 4b^2 \zeta^2 \frac{a\xi - b\eta}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^3} \end{vmatrix},$$

$$\|g^{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{a^2 + b^2 \zeta^2}{\zeta^2} & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + b^2 \zeta^2) \left[ 1 + 4b^2 \zeta^2 \frac{(a\xi - b\eta)^2}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^3} \right] & -2b\zeta \frac{a\xi - b\eta}{a^2 + b^2 \zeta^2} \\ 0 & -2b\zeta \frac{a\xi - b\eta}{a^2 + b^2 \zeta^2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$b_\xi = \pm \frac{\zeta}{\sqrt{a^2 + b^2 \zeta^2}}, \quad b_\eta = b_\zeta = 0, \quad b^\xi = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \zeta^2}}{\zeta}, \quad b^\eta = b^\zeta = 0.$$

From (2.17), (6.1) and (6.2), we then obtain

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} Q^{-2} g_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & Q g_{\eta\eta} & Q g_{\eta\zeta} \\ 0 & Q g_{\eta\zeta} & Q g_{\zeta\zeta} \end{vmatrix}, \quad \|(c^{-1})^{ij}\| = \begin{vmatrix} Q^2 g^{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g^{\eta\eta}}{Q} & \frac{g^{\eta\zeta}}{Q} \\ 0 & \frac{g^{\eta\zeta}}{Q} & \frac{1}{Q} \end{vmatrix},$$

where  $Q = Q(\eta, \zeta) = c_3$ . Setting  $R_{\xi\eta\xi\eta} = 0$ , we obtain, after some simplification

$$\left. \begin{aligned} & \frac{4b^2 \zeta^4}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^2 Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial Q^{-2}}{\partial \eta} (a\xi - b\eta)^2 \\ & = 2b\zeta (a\xi - b\eta) \left[ \frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{\zeta^2}{Q^2 (a^2 + b^2 \zeta^2)} \right. \\ & \quad + 2 \frac{b^2 \zeta^3}{a^2 + b^2 \zeta^2} \cdot \frac{\partial Q^{-2}}{\partial \eta} \\ & \quad \left. + \frac{\zeta^2}{a^2 + b^2 \zeta^2} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial Q^{-2}}{\partial \eta} \right] \\ & \quad + \frac{4a^2 b^2 \zeta^2 Q}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^2} - \frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q (a^2 + b^2 \zeta^2)}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{\zeta^2}{Q^2 (a^2 + b^2 \zeta^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Now  $a\xi - b\eta$ ,  $\eta$ , and  $\zeta$  are functionally independent and  $Q = Q(\eta, \zeta)$ . Thus, in order that (6.10) hold identically in these quantities, the coefficient of each power of  $a\xi - b\eta$  must vanish, from which

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial Q (a^2 + b^2 \zeta^2)}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{\zeta^2}{Q^2 (a^2 + b^2 \zeta^2)} = \frac{4a^2 b^2 \zeta^2 Q^2}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^2}.$$



It then follows that  $R_{\xi\zeta\eta\xi} \neq 0$  unless  $Q = 1$ , in which case  $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ , so the material is unstrained.

Acknowledgment: I take this opportunity to express my appreciation to Professor R. S. RIVLIN for the interest he has shown in this work.

#### BIBLIOGRAPHY

- [1] R. S. RIVLIN, *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials*, IV: *Further Developments of the General Theory*, Phil. Trans. Roy. Soc. London [A] 241, 379–397 (1948).
- [2] C. TRUESDELL, *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, J. Rational Mech. Anal. 1, 125–300 (1952).
- [3] R. S. RIVLIN, *A Note on the Torsion of an Incompressible Highly Elastic Cylinder*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 485–487 (1948).
- [4] R. S. RIVLIN, *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials*, V: *The Problem of Flexure*, Proc. Roy. Soc. London [A] 195, 463–475 (1949).
- [5] A. E. GREEN and R. T. SHIELD, *Finite Elastic Deformation of Incompressible Isotropic Bodies*, Proc. Roy. Soc. London [A] 202, 407–419 (1950).
- [6] J. L. ERICKSEN and R. S. RIVLIN, *Large Elastic Deformations of Homogeneous Anisotropic Materials*, to appear in the J. Rational Mech. Anal.
- [7] O. VELEN, *Invariants of Quadratic Differential Forms*, Cambridge Tracts Math. and math. Phys. No. 24 (Cambridge, 1927).
- [8] M. BÔCHER, *Introduction to Higher Algebra* (Macmillan, New York, 1907).
- [9] A. J. McCONNELL, *Applications of the Absolute Differential Calculus* (Blackie and Son Ltd., London, 1931).
- [10] L. P. EISENHART, *Differential Geometry* (Princeton University Press, Princeton, 1941).
- [11] R. C. PRIM, *Steady Rotational Flow of Ideal Gases*, J. Rational Mech. Anal. 1, 425–497 (1952).
- [12] G. HAMEL, *Potentialströmungen mit konstanter Geschwindigkeit*, Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. 1937, 5–20.
- [13] J. E. ADKINS, A. E. GREEN and R. T. SHIELD, *Finite Plane Strain*, Phil. Trans. Roy. Soc. London [A] 246, 181–213 (1953).

#### Résumé

Nous avons dérivé trois solutions des équations de l'élasticité non linéaire. Nous avons déterminé les déformations qui sont possibles dans un solide isotrope et incompressible quelconque.

(Received: January 21, 1954.)

# Die Konstruktion der mittleren Linie bei Oberflächenprofilen und einige Zusammenhänge zwischen den zur Kennzeichnung von Oberflächen benutzten Grössen

Von MAX GARY, Braunschweig<sup>1)</sup>

## 1. Übersicht

Das Ziel der Prüfung technischer Oberflächen besteht darin, diesen eine oder mehrere Kennzahlen zuzuordnen, die geeignet sind, diese Oberflächen zu bewerten. Es liegt dasselbe Problem vor wie bei der Untersuchung statistischer Massen. Es handelt sich um eine Mannigfaltigkeit von  $\infty^2$  Grössen, denen eine oder mehrere Zahlen zugeordnet werden sollen. Dadurch erwachsen eine Reihe von Fragen:

In welcher Weise können diese Kennzahlen eindeutig gefunden werden?

Welche Oberflächen werden umgekehrt durch diese Kennzahlen beschrieben? Das heisst, haben die erhaltenen Kennzahlen überhaupt einen Sinn?

Und schliesslich, wenn mehrere Kennzahlen ermittelt wurden: Wie können die einen aus den anderen berechnet werden?

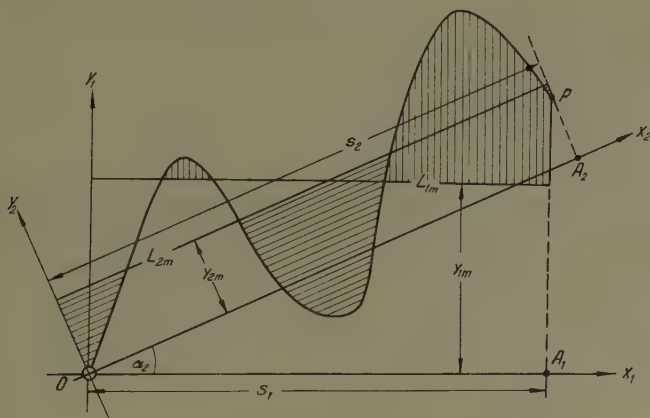
## 2. Profilschnitte und Flächenkennzeichnung

Legt man durch eine Fläche einen ebenen Profilschnitt (siehe Figur 1), so ergibt sich durch die Form der entstehenden Kurve *ein* Kennzeichen für die Fläche. Die Fläche liege dabei in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, und die Ebene des Profilschnitts wie auch diejenigen weiterer Profilschnitte sollen senkrecht zu *einer* im folgenden als Basisebene bezeichneten Koordinatenebene sein, nämlich jener, über der die Fläche ausgebreitet ist.

Nun ist die Mannigfaltigkeit der Geraden einer Ebene  $\infty^2$ , und auf einer jeden dieser Geraden gibt es  $\infty^1$  mögliche Lagen einer Bezugsstrecke  $S_b$ , so dass also insgesamt  $\infty^3$  verschiedene Profilschnitte der Länge  $S_b$  herangezogen werden könnten, um eine Aussage über die Fläche zu treffen. Diese Profilschnitte schneiden sich zum Teil oder fallen gar teilweise zusammen. Es ist offensichtlich, dass zunächst nur solche Profilschnitte, die höchstens einen Punkt gemeinsam haben, zur Berechnung einer oder mehrerer Flächenkennzahlen benutzt werden dürfen.

<sup>1)</sup> Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt.

Zweckmässig scheint es zu sein, aus einer Auswahl von verschieden gelegten Profilausschnitten, die sich selbst nicht schneiden, durch harmonische Analyse die Fourier-Koeffizienten zu bestimmen und, *vorausgesetzt, dass deren Streuung ein noch festzusetzendes Mass nicht überschreitet*, durch Mittelwertbildung oder durch die sonstigen in der Statistik üblichen Verfahren neue zugeordnete Fourier-Koeffizienten zu berechnen, die als Kennzahlen für die gesamte Oberfläche angesehen werden können.



Figur 1  
Ebener Profilschnitt durch eine Fläche.

Sofern sich zeigt, dass bei den einzelnen technischen Oberflächenbearbeitungsverfahren eine erkennbare Verteilung der Fourier-Koeffizienten auftritt, die in den Einzelfällen lediglich durch einen konstanten Faktor voneinander verschieden sind, ist es sinnvoll, diesen Fourier-Koeffizienten selbst wieder neue Zahlen zuzuordnen:

Wenn die Fourier-Koeffizienten mit

$$a_r, b_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots, n)$$

bezeichnet werden, entsprechend einer Reihenentwicklung – die Darstellbarkeit mit endlich vielen Reihengliedern vorausgesetzt –

$$y = \sum_1^n \left( a_r \cos r \frac{2 \pi}{S_b} x + b_r \sin r \frac{2 \pi}{S_b} x \right) + a_0, \tag{1}$$

so lässt sich der Wert

$$h_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{S_b} \int_0^{S_b} y^2 dx} \tag{2}$$

in der Form

$$h_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_1^n (a_r^2 + b_r^2) + \frac{1}{2} a_0^2} \quad (3)$$

finden.

Es ist dies nicht die einzige Möglichkeit, die Grössen

$$a_r, b_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots, n)$$

einer Zahl zuzuordnen.

Bildet man zum Beispiel

$$R_m = \sum_1^n |a_r| + \sum_1^n |b_r| + a_0 \quad (4)$$

und lässt zu, dass die Harmonischen beliebige Phasenverschiebung haben, so erhält man einen Wert  $R_m$ , der den maximal möglichen Abstand eines oder mehrerer Punkte der untersuchten Fläche von der Basisebene darstellt. Bezieht man hingegen die einzelnen Profilschnitte, aus denen die Fourier-Koeffizienten berechnet wurden, auf die «mittlere Linie», so ist  $R_m$  als «mittlere Flächenrautiefe» zu bezeichnen. Hierauf wird im folgenden Abschnitt noch näher eingegangen.

Eine weitere Möglichkeit, den Grössen

$$a_0, a_r, b_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots, n)$$

eine Zahl zuzuordnen, ist durch die Formel

$$h_{AVE} = \frac{1}{S_b} \int_0^{S_b} \left| \sum_1^n \left( a_r \cos r \frac{2\pi}{S_b} x + b_r \sin r \frac{2\pi}{S_b} x \right) + a_0 \right| dx \quad (5)$$

gegeben.

Nachdem man sich durch Prüfung der Streuung der Fourier-Koeffizienten Klarheit darüber verschafft hat, in welchen Fällen es sinnvoll ist, eben diese Koeffizienten oder gar die aus ihnen berechneten Grössen als Repräsentanten einer ganzen Fläche zu betrachten, kann man, wo dies also angängig ist, auch gleich aus den einzelnen Profilkurven die Grössen  $h_{RMS}$ ,  $h_{AVE}$  oder  $R$  ermitteln und deren Mittelwert oder nach einer in der Statistik üblichen anderen Methode einen zugeordneten Wert bestimmen.

Hier tritt ein neues Problem auf.

Wie eingangs erwähnt, ist die zu untersuchende Fläche auf die Basisebene bezogen. Diese Ebene ist in Wirklichkeit bei einer vorgegebenen Oberfläche nicht realisiert. Sie muss erst eingeführt werden, und zwar bezogen auf die Fläche selbst.

Nun muss hier eingefügt werden, dass die Oberfläche in der Praxis durch die aufgezeichneten Profilkurven, die selbst keine Bezugslinie haben, erst gegeben

wird. Es muss daher für jede Profilkurve eine Bezugslinie, «mittlere Linie» genannt, bestimmt werden. Dass diese mittleren Linien nicht exakt nur einer einzigen Ebene – der Basisebene – angehören, ist dann unvermeidlich.

### 3. Bestimmung der mittleren Linie

Im DIN-Blatt 4762 (Februar 1952) wird als Definition der «mittleren Linie  $L_m$ » angegeben: «Die innerhalb der Bezugsstrecke so gelegte Linie, dass die Summe der werkstoffgefüllten Flächen über ihr und der werkstofffreien Flächen unter ihr gleich und ein Minimum sind». Ob diese Definition hinreichend ist, um eindeutig die «mittlere Linie» zu finden und nach welchem Verfahren dann diese Linie auch wirklich gefunden werden kann, ist bisher nicht bekannt.

Bei dieser Definition erhebt sich nämlich sofort die Frage: Soll über einer bestimmten Bezugsstrecke durch zwei Senkrechte in den Endpunkten der Bezugsstrecke aus der Profilkurve ein bestimmtes Stück ausgeschnitten werden und jetzt die «mittlere Linie» so bestimmt werden, dass die erwähnte Forderung erfüllt ist? Oder ist die Profilkurve lediglich durch zwei Punkte begrenzt und soll die «mittlere Linie» dann entsprechend der aufgestellten Forderung gesucht werden? Im letzteren Falle wäre die Forderung: «Die innerhalb der Bezugsstrecke so gelegte Linie, dass...» usw. unverständlich. Im folgenden wird ein Näherungsverfahren beschrieben, nach dem sich diese Aufgabe lösen lässt. Allerdings ist über die genaue Länge der Bezugsstrecke zunächst keinerlei Aussage gemacht. Vielmehr wird lediglich verlangt, dass auf der Profilkurve zwei Punkte das zu betrachtende Stück derselben begrenzen. Die Länge der Bezugsstrecke ergibt sich erst hinterher. Zunächst sei die Profilkurve (siehe Figur 1) in bezug auf das willkürliche rechtwinklige Koordinatensystem  $(x_1, y_1)$  gegeben. Dann lässt sich durch Planimetrieren die Gerade  $L_{1m}$  finden:

$$y_{1m} = \frac{1}{S_1} \int_0^{S_1} y_1(x_1) dx_1. \quad (6)$$

Eine weitere Planimetrierung der Flächenstücke, die auf *einer* Seite der Linie  $L_{1m}$  liegen und die von dieser Linie und der Profilkurve sowie gegebenenfalls noch vom Lot durch den Punkt  $P$  auf die  $x_1$ -Achse begrenzt werden, liefert den Wert  $F_1$  (siehe gestrichelte Fläche in Figur 1).

Dreht man jetzt das Koordinatensystem um den Winkel  $\alpha_2$ , der im Gegen-sinn des Uhrzeigers positiv gewählt sei, um den Punkt  $O$ , dann erhält man das neue Koordinatensystem  $(x_2, y_2)$ . Die senkrechte Projektion des Punktes  $P$  auf die  $x_2$ -Achse liefert den Punkt  $A_2$ .

Durch die Strecke  $OA_2$  ist die Bezugsstrecke  $S_2$  gegeben. Wiederum erhält man durch zwei Planimetrierungen den  $F_1$  entsprechenden Wert  $F_2$  und die



neue mittlere Linie  $L_{2m}$ . Die Fortsetzung des Verfahrens, wobei der Koordinatenanfang stets beibehalten wird, liefert durch Interpolation aus den zugeordneten Werten

$$\begin{array}{c|c|c|c} \alpha_1 = 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ F_1 & F_2 & F_3 & \dots \end{array}$$

den zum Winkel  $\alpha^*$  gehörenden Minimalwert  $F^*$ . Diese Interpolation wird zweckmässig graphisch durchgeführt.

Der Wert  $F_3$  muss in jedem Falle ermittelt werden, um den Maximalwert  $F^*$  wenigstens genähert zu bestimmen.

Die graphische Interpolation kann auch durch die numerische ersetzt werden:

$$\alpha^* = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \frac{(F_3 - F_2)(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)}{2[F_1(\alpha_2 - \alpha_3) + F_2(\alpha_3 - \alpha_1) + F_3(\alpha_1 - \alpha_2)]} \quad (7)$$

Der Wert  $F^*$  folgt dann zur Kontrolle aus zwei weiteren Planimetrierungen.

Zur näherungsweisen Bestimmung der mittleren Linie sind somit mindestens sechs Planimetrierungen erforderlich. Die Kontrolle bedingt zusätzlich zwei weitere Planimetrierungen.

An Stelle der Definition der mittleren Linie entsprechend dem Normblatt wäre auch eine andere Festlegung denkbar:

Mittlere Linie = Achse des kleinsten Trägheitsmoments der Fläche, gebildet aus der Profilkurve und der Verbindungslinie der Begrenzungspunkte derselben.

Der Vorteil: Die Definition ist eindeutig. Durch zwei Planimetrierungen mit einem Quadratplanimeter erhält man eindeutig den Schwerpunkt der Fläche. Durch drei weitere Planimetrierungen mit einem Potenzplanimeter zur Bestimmung von  $\oint y^3 dx$  erhält man die gesuchte Linie. Sämtliche Planimetrierungen können mit einem einzigen Instrument vorgenommen werden<sup>1)</sup>.

#### 4. Der Zusammenhang von $h_{AVE}$ mit $h_{RMS}$ in Gestalt einer Abschätzung

Bezieht man die Darstellung der Profilkurve auf die mittlere Linie (Gerade), dann verschwindet das absolute Glied in Gleichung (1):  $a_0 = 0$ . Des weiteren sei verlangt, dass nur eine endliche Anzahl von Reihengliedern auftrete.

Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichheit

$$\left( \sum_1^n a_r c_r \right)^2 \leq \left( \sum_1^n a_r^2 \right) \left( \sum_1^n c_r^2 \right)$$

<sup>1)</sup> Vgl. L. A. OTT, *Systematische Entwicklung der Planimeter und Integrimeter aus der einfachsten Grundform*, Messtechnik 13, 41-48 (1937).

ergibt sich aus Gleichung (5)

$$h_{AVE} \leq \frac{1}{S} \int_0^S \left| \sqrt{\left[ \sum_1^n (a_r^2 + b_r^2) \right] \left[ \sum_1^n \left( \cos^2 r \frac{2\pi}{S} x + \sin^2 r \frac{2\pi}{S} x \right) \right]} \right| dx, \quad (8)$$

$$h_{AVE} \leq \frac{1}{S} \int_0^S \left| \sqrt{\sum_1^n (a_r^2 + b_r^2)} \sqrt{n} \right| dx,$$

$$h_{AVE} \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_1^n (a_r^2 + b_r^2)}. \quad (9)$$

Mit Benutzung von Gleichung (3), in der  $a_0 = 0$  ist, folgt

$$h_{RMS} \geq \frac{h_{AVE}}{\sqrt{2n}}; \quad (10)$$

$n$  = maximale Anzahl der für die Darstellung der Profilkurve benötigten Kosinus- oder Sinusfunktionen.

Eine untere Schranke für  $h_{AVE}$  lässt sich für spezielle Fälle von Profilkurven angeben. Unter der Voraussetzung, dass sich die Profilkurve in der Form

$$y = a_r \sin r \frac{2\pi}{S} x + a_\mu \sin \mu \frac{2\pi}{S} x \quad (11)$$

darstellen lässt, gilt

$$h_{AVE} = \frac{1}{S} \int_0^S |y| dx \geq \frac{1}{S} \int_0^S \left| a_r \sin r \frac{2\pi}{S} x \right| dx + \frac{1}{S} \int_0^S \left| a_\mu \sin \mu \frac{2\pi}{S} x \right| dx, \quad (12)$$

wie unmittelbar einzusehen ist. Folglich:

$$h_{AVE} \geq \frac{2}{\pi} (|a_r| + |a_\mu|). \quad (13)$$

Wenn es gelingt, für eine nach bestimmten Herstellungsverfahren erzeugte Fläche die obigen Voraussetzungen (zwei Sinuswellen) als erfüllt zu erkennen, so kann für den Quotienten  $h_{RMS}/h_{AVE}$  eine obere Schranke angegeben werden.

Ist

$$|a_\mu| = \frac{|a_r|}{m} \quad \text{mit } m > 1, \quad (14)$$

so folgt

$$h_{AVE} = \frac{2}{\pi} |a_r| \left( 1 + \frac{1}{m} \right)$$

und nach Gleichung (3)

$$h_{RMS} = \frac{a_r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}.$$

Daher:

$$h_{RMS} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{m^2+1}}{m-1} \cdot h_{AVE}. \quad (15)$$

Beispiel:  $m = 10$ .  $h_{RMS} = h_{AVE} \cdot 1,24$ .

In der Elektrotechnik heisst die Grösse

$$\frac{h_{RMS}}{h_{AVE}} = \text{«Formfaktor»} = \frac{E_{eff}}{E_{mittel}}.$$

Einen Überblick über die Werte  $h_{RMS}$  und  $h_{AVE}$  für einige Kurvenformen mit den Bezeichnungen der Elektrotechnik gibt das Archiv für Technisches Messen V3620-2.

### Summary

Attention is directed first to the analogy between the problem of evaluating collectives and that of finding a numerical expression for an existing surface.

For the value  $h_{RMS}/h_{AVE}$ , approximations are made using Fourier series of the surface profil based on the center line.  $h_{AVE}$  = center line average (=  $h_{CLA}$ ). For  $h_{AVE}$ , an upper bound calculated from the Fourier coefficients is stated. With this, and as  $h_{RMS}$  may be determined in a definite form, a lower bound for  $h_{RMS}/h_{AVE}$  is obtained. Provided that the surface profil is the superimposition of two harmonics, a lower bound for  $h_{AVE}$  and then an upper bound for  $h_{RMS}/h_{AVE}$  could be found. In order to get a base line for which the areas embraced by the profile above and below the line are equal and a minimum, a graphical method is constructed.

(Eingegangen: 25. November 1953.)

## Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus

VON HEINZ RUTISHAUSER, Zürich<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

Nach einer ersten Mitteilung<sup>2)</sup> über die theoretischen Grundlagen des QD-Algorithmus sollen nun einige Anwendungen behandelt werden. Vorerst wiederholen wir aber die Definition des QD-Algorithmus:

Mit den Ausgangswerten  $s_v = s_1^{(v)}$  wende man nacheinander für  $v = 0, 1, 2, \dots$  und dann für  $\sigma = 1, 2, 3, \dots$  unter Beachtung von  $e_0^{(v)} = 0$  die folgenden Formeln an:

$$q_\sigma^{(v)} = \frac{s_\sigma^{(v+1)}}{s_\sigma^{(v)}}, \quad d_\sigma^{(v)} = q_\sigma^{(v+1)} - q_\sigma^{(v)}, \quad e_\sigma^{(v)} = d_\sigma^{(v)} + e_{\sigma-1}^{(v+1)}, \quad s_{\sigma+1}^{(v)} = s_\sigma^{(v+1)} e_\sigma^{(v)}. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.

<sup>2)</sup> H. RUTISHAUSER, *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, ZAMP 5, 233 (1954). Diese Arbeit wird im folgenden immer mit I zitiert; sie enthält auch das gemeinsame Literaturverzeichnis für beide Arbeiten. Eine weitere Arbeit über Anwendungen des QD-Algorithmus (Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix) wird in Bd. 6, 1955, dieser Zeitschrift erscheinen.

Die so erhaltenen Grössen werden wie folgt in ein Schema eingeordnet (QD-Schema der  $s_\nu$ ):

$$\begin{array}{ccccccc}
 s_1^{(0)} & & & & & & \\
 & q_1^{(0)} & & & & & \\
 s_1^{(1)} & & d_1^{(0)} = e_1^{(0)} & s_2^{(0)} & & & \\
 & q_1^{(1)} & & & q_2^{(0)} & & \\
 s_1^{(2)} & & d_1^{(1)} = e_1^{(1)} & s_2^{(1)} & & d_2^{(0)} & e_2^{(0)} & s_3^{(0)} \\
 & q_1^{(2)} & & & q_2^{(1)} & & & & q_3^{(0)} \\
 s_1^{(3)} & & d_1^{(2)} = e_1^{(2)} & s_2^{(2)} & & d_2^{(1)} & e_2^{(1)} & s_3^{(1)} & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass man für die Anwendungen häufig nur die Werte  $q_\sigma^{(\nu)}$  und  $e_\sigma^{(\nu)}$  benötigt, man kann dann die Kolonnen  $s_2^{(\nu)}$ ,  $d_2^{(\nu)}$ ,  $s_3^{(\nu)}$ ,  $d_3^{(\nu)}$  ... weglassen und erhält so das QD-Schema in komprimierter Form [hierzu die Formeln (I, 4)]:

$$\begin{array}{ccccccc}
 s_1^{(0)} & & & & & & \\
 & q_1^{(0)} & & & & & \\
 s_1^{(1)} & & e_1^{(0)} & & & & \\
 & q_1^{(1)} & & q_2^{(0)} & & & \\
 s_1^{(2)} & & e_1^{(1)} & & e_2^{(0)} & & \\
 & q_1^{(2)} & & q_2^{(1)} & & q_3^{(0)} & \\
 s_1^{(3)} & & e_1^{(2)} & & e_2^{(1)} & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

## 2. Umwandlung einer Potenzreihe in einen Kettenbruch

Ist eine im Unendlichen reguläre Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{z^{n+1}} = f(z)$$

gegeben, so kann man aus dem QD-Schema der Koeffizienten  $s_\nu$  nach (I, 9) unmittelbar die für die Aufstellung des S-Kettenbruches notwendigen Grössen ablesen; es ist nämlich

$$f(z) = \cfrac{s_0}{z} - \cfrac{q_1^{(0)}}{1} - \cfrac{e_1^{(0)}}{z} - \cfrac{q_2^{(0)}}{1} - \cfrac{e_2^{(0)}}{z} - \dots \quad (2)$$

Das gilt in vielen Fällen auch dann noch, wenn die Reihe für  $f(z)$  überall divergiert, beispielsweise für

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - \frac{3!}{z^4} + \dots \quad \left( \text{asymptotische Reihe für } e^z \int_z^\infty \frac{e^{-x}}{x} dz \right).$$

Das QD-Schema lautet nämlich in diesem Fall:

$\nu$	$s_\nu$	$q_1^{(\nu)}$	$e_1^{(\nu)}$	$q_2^{(\nu)}$	$e_2^{(\nu)}$	$q_3^{(\nu)}$	
$\downarrow$	1						
	-1	-1					
	-1	-2	-1	-2			
	2	-3	-1		-2		
	-6	-3	-1	-3	-2	-3	
	24	-4		-4		-4	
	.	.	.		-2		
	.	.	.		.	-5	
	.	.	.		.	.	
	.	.	.		.	.	

Allgemein:

$q_\sigma^{(\nu)} = -(\sigma + \nu)$

$e_\sigma^{(\nu)} = -\sigma$

Somit nach (2):

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1} + \frac{1}{z} + \frac{2}{1} + \frac{2}{z} + \frac{3}{1} + \frac{3}{z} + \dots$$

Dieser Kettenbruch konvergiert für alle  $z$ , die nicht auf der negativ-reellen Achse liegen (vgl. [8], § 93).

Soll eine im Nullpunkt reguläre Funktion

$$f(z) = \sum_0^\infty s_n z^n$$

in einen Kettenbruch entwickelt werden, so betrachtet man die Hilfsfunktion

$$\frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) = \sum_0^\infty \frac{s_n}{u^{n+1}},$$

deren Kettenbruch nach (1) durch

$$\frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{s_0}{u} - \frac{q_1^{(0)}}{1} - \frac{e_1^{(0)}}{u} - \frac{q_2^{(0)}}{1} - \dots$$

gegeben ist. Setzt man hier für  $u$  wieder  $1/z$  ein, so führt eine Äquivalenztransformation, nämlich Erweitern aller ungeraden Teilbrüche mit  $z$ , unmittelbar zum gewünschten Resultat:

$$\sum_0^\infty s_n z^n = \frac{s_0}{1} - \frac{z q_1^{(0)}}{1} - \frac{z e_1^{(0)}}{1} - \frac{z q_2^{(0)}}{1} - \frac{z e_2^{(0)}}{1} - \frac{z q_3^{(0)}}{1} - \dots \quad (3)$$



Stellt man beispielsweise für die Koeffizienten der Funktion

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

das QD-Schema auf, so erhält man

$$q_1^{(v)} = \frac{1}{v+1}; \quad q_{\sigma}^{(v)} = \frac{v+\sigma-1}{(v+2\sigma-2)(v+2\sigma-1)}; \quad e_{\sigma}^{(v)} = \frac{-\sigma}{(v+2\sigma-1)(v+2\sigma)}$$

und damit durch Einsetzen in (3) den bekannten Kettenbruch

$$e^z = \frac{1}{1} - \frac{z}{1} + \frac{z/2}{1} - \frac{z/6}{1} + \frac{z/6}{1} - \frac{z/10}{1} + \frac{z/10}{1} - + \dots$$

3. Summation schlecht konvergenter Reihen

Für viele Zwecke der angewandten Mathematik sind auch geometrische Reihen nicht genügend gut konvergent. Beispielsweise benötigt man zirka 20 Glieder der Reihe  $\sum_0^\infty 2^{-v}$ , um eine relative Genauigkeit von  $10^{-6}$  zu erreichen. Für unendliche Reihen, die sich ungefähr wie eine geometrische Reihe verhalten (das heisst, der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern variiert langsam), erweist sich der QD-Algorithmus als praktisch brauchbares Summierungsverfahren<sup>1)</sup>.

Dessen Prinzip stammt von STIELTJES<sup>2)</sup>, der es insbesondere zur Summation divergenter Reihen verwendete:

Ist  $\sum_0^\infty s_n$  die zu summierende Reihe, so entwickle man die Funktion

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{s_n}{z^{n+1}}$$

in einen J- oder S-Kettenbruch und setze dann  $z = 1$  ein.

Als Beispiel betrachten wir eine Reihe, die im Verlaufe einer grösseren Berechnung auftrat:

$$0,775551 + 0,587903 + 0,451730 + 0,350836 + 0,274795 + 0,216681 + \dots$$

<sup>1)</sup> Wenn jedoch die zu summierende Reihe nicht den Charakter einer geometrischen Reihe hat (zum Beispiel  $1 - 1! + 2! - 3! + 4! - + \dots$ ), so ist wohl das Verfahren von D. SHANKS vorzuziehen. (Vgl. D. SHANKS, *An Analogy Between Transients and Mathematical Sequences...*, Naval Ordnance Laboratory Memorandum 9994.)

<sup>2)</sup> STIELTJES, *Oeuvres*, Bd. 2; siehe auch H. WALL [8], § 93.

Wir stellen das QD-Schema auf:

$s_p$	$q_1^{(p)}$	$e_1^{(p)}$	$q_2^{(p)}$	$e_2^{(p)}$	$q_3^{(p)}$
0,775551	0,7580456				
0,587903		0,0103295			
0,451730	0,7683751		0,6155258		
0,350836	0,7766498	0,0082747	0,6202067	0,0129556	
0,274795	0,7832577	0,0066079	0,6236048	0,0100060	0,4790043
0,216681	0,7885187	0,0052610			

Hieraus nach (2), wenn man  $z = 1$  einsetzt:

$$\sum_0^\infty s_p = \left| \frac{0,775551}{1} \right| - \left| \frac{0,7580456}{1} \right| + \left| \frac{0,0103295}{1} \right| - \left| \frac{0,6155258}{1} \right| + \left| \frac{0,0129556}{1} \right| - \left| \frac{0,4790043}{1} \right| \approx 3,52348,$$

was mit allen angegebenen Stellen mit dem auf andere Weise erhaltenen wirklichen Wert übereinstimmt.

Es sei hier beiläufig bemerkt, dass die aus der Auflösungstheorie für lineare Gleichungssysteme und Integralgleichungen zweiter Art hervorgehenden Neumannschen Reihen fast immer schlecht konvergieren oder divergieren. Nun verhält sich aber eine Neumannsche Reihe fast immer ungefähr wie eine geometrische, so dass man sie sehr wohl mit Hilfe des QD-Algorithmus summieren kann (und zwar auch im Falle der Divergenz). Diesbezügliche Versuche bei partiellen Differentialgleichungen, die allerdings erst im kleinen Maßstab durchgeführt wurden, verliefen durchaus positiv.

#### 4. Auflösung von algebraischen Gleichungen

Es seien die Nullstellen eines Polynoms  $N(z) = z^n + \dots$  zu bestimmen. Es erscheint zweckmässig, zunächst eine rationale Funktion  $f(z) = N_1(z)/N(z)$  zu konstruieren, deren Zähler irgendein Polynom vom Grade  $n - 1$  ist, dann diese in eine Potenzreihe  $\sum_0^\infty (s_k/z^{k+1})$  zu entwickeln und schliesslich durch Anwendung des QD-Algorithmus auf die  $s_p$  die Pole von  $f(z)$  zu bestimmen. Der QD-Algorithmus liefert diese nach I, Satz 3, als  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} q_\sigma^{(p)}$ .

Leider erweist sich nun dieses Vorgehen in vielen Fällen als undurchführbar, weil die Berechnung der «höheren» Quotienten  $q_2^{(p)}, q_3^{(p)}, q_4^{(p)}, \dots$  für grosse  $p$  in der Regel mit einem erheblichen Genauigkeitsverlust verbunden ist, wie das folgende Beispiel zeigt:

*Beispiel:* Bestimmung der Pole von

$$\frac{z^2 + 3z + 1}{z^3 - 9z^2 - 8z + 2} = \frac{1}{z} + \frac{12}{z^2} + \frac{117}{z^3} + \dots$$

Das zugehörige QD-Schema lautet in komprimierter Form, wenn mit sechs wesentlichen Stellen gerechnet wird:

$s_v$	$q_1^{(v)}$	$e_1^{(v)}$	$q_2^{(v)}$	$e_2^{(v)}$	$q_3^{(v)}$	$e_3^{(v)}$
1	12					
12	9,75	-2,25				
117		0,05342	-0,231487			
	9,80342		-1,52318	-1,23826		
1147		-0,00830		0,582573	0,716621	
	9,79512		-0,932307		0,292689	0,158641
11235		0,00079		-0,182893		
	9,79591		-1,11599			
110057		-0,00009				
	9,79582					
1078099						

Die Werte  $q_1^{(v)}$  konvergieren in der Tat gegen eine Nullstelle des Polynoms  $z^3 - 9z^2 - 8z + 2$ , aber infolge der kleinen und damit relativ ungenauen Werte  $e_1^{(v)}$  werden alle weiter rechts stehenden Grössen unzuverlässig. Insbesondere wird auch  $e_3^{(0)}$  nicht 0, wie es auf Grund der Theorie (I, Satz 2) zu erwarten wäre.

### 5. Die progressive Form des QD-Algorithmus

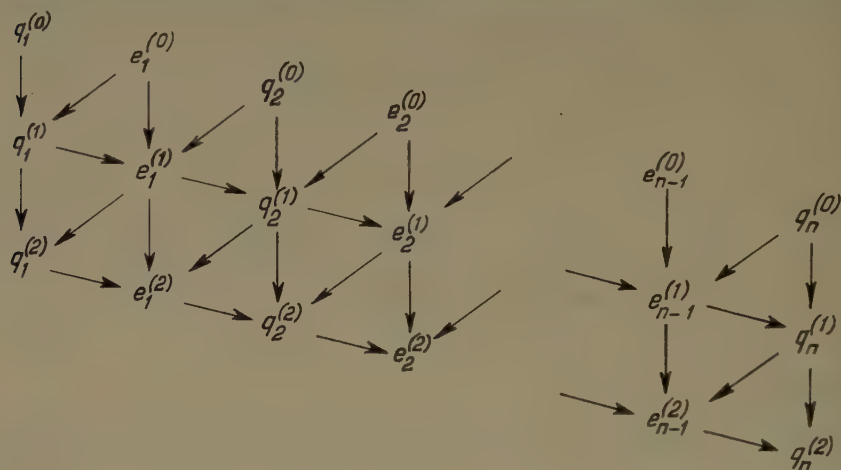
Die wenig ermutigenden Resultate des § 4 lassen sich wesentlich verbessern, wenn man die Formeln (4) in I dazu benützt, um aus einer Schrägzeile des QD-Schemas (komprimierte Form) die nächst tiefer liegende zu berechnen. Zu diesem Zweck sind nur die Formeln (I, 4) umzustellen und dann unter Beachtung von  $e_0^{(v+1)} = 0$  nacheinander für  $\sigma = 1, 2, 3, \dots$  anzuwenden:

$$\left. \begin{aligned} q_{\sigma}^{(v+1)} &= q_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} - e_{\sigma-1}^{(v+1)}, \\ e_{\sigma}^{(v+1)} &= \frac{e_{\sigma}^{(v)} q_{\sigma+1}^{(v)}}{q_{\sigma}^{(v+1)}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wenn also einmal die in der obersten Schrägzeile stehenden Elemente  $q_{\sigma}^{(0)}$  und  $e_{\sigma}^{(0)}$  bekannt sind, kann man vermöge der Formel (4) das ganze QD-Schema von oben nach unten aufbauen (statt von links nach rechts). Die *progressive* Form des QD-Algorithmus ist natürlich besonders dann vorteilhaft, wenn die  $s_v$  die Koeffizienten einer rationalen Funktion sind. Nach I, Satz 2, ist dann das QD-Schema nach rechts beschränkt (das heisst  $e_n^{(v)} = 0$  für ein gewisses  $n$  und

alle  $\nu$ ), so dass die Berechnung einer neuen Schrägzeile nach (4) nur endlich viele Rechenoperationen erfordert.

Schematische Darstellung dieses Vorgangs (die Pfeile geben an, welche Größen zur Berechnung eines neuen Elements herangezogen werden müssen):



## 6. Auflösung algebraischer Gleichungen mit Hilfe des progressiven QD-Algorithmus

Wir wenden uns wieder der Aufgabe zu, die algebraische Gleichung  $N(z)=0$  durch Bestimmung der Pole von  $f(z) = N_1(z)/N(z)$  aufzulösen. Der progressive QD-Algorithmus ist das geeignete Werkzeug für diesen Zweck, weil er in natürlicher Weise und ohne wesentlichen Genauigkeitsverlust die  $q_\sigma^{(\nu)}$  für grosses  $\nu$  zu berechnen erlaubt<sup>1)</sup>. Auf diese Weise kann man die Nullstellen von  $N(z)$  beliebig genau approximieren, soweit sie nicht gleiche Absolutbeträge besitzen. Ein Problem bietet lediglich die Beschaffung der Anfangswerte  $q_\sigma^{(0)}$  und  $e_\sigma^{(0)}$ . Man findet diese nach (2) offenbar durch Entwicklung der rationalen Funktion  $N_1(z)/N(z)$  in einen S-Kettenbruch mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus:

Ausgehend von den Polynomen

$$N_1(z) = z^{n-1} + \dots \quad \text{und} \quad N_0^*(z) = N(z) = z^n + \dots$$

konstruieren wir für  $k = 1, 2, 3, \dots$  nacheinander die Polynome  $N_k(z)$  und  $N_k^*(z)$

<sup>1)</sup> Nachtrag bei der Korrektur. Von Herrn Dr. A. HOUSEHOLDER, Oak Ridge, Tenn., werde ich darauf aufmerksam gemacht, dass AITKEN für seine unter [1] behandelte Erweiterung der Bernoullischen Methode ebenfalls eine progressive Form angibt. Vgl. A. C. AITKEN, *Further Numerical Studies in Algebraic Equations and Matrices*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 51, 80–90 (1931). Über die sich daraus für den QD-Algorithmus ergebenden Folgerungen wird später berichtet werden.

vom Grade  $n - k$ :

$$\left. \begin{aligned} N_k^*(z) &= \frac{z N_k(z) - N_{k-1}^*(z)}{q_k} \quad (k = 1, 2, \dots n), \\ N_{k+1}(z) &= \frac{N_k^*(z) - N_k(z)}{e_k} \quad (k = 1, 2, \dots n-1). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dabei werden die  $q_k$  und  $e_k$  eindeutig bestimmt, wenn man verlangt, dass die Koeffizienten der höchsten Potenzen in allen diesen Polynomen  $N_k$  und  $N_k^*$  1 sein sollen.

Da man nachträglich leicht feststellt, dass der endliche Kettenbruch

$$\cfrac{1}{\cfrac{1}{z}} = \cfrac{q_1}{1} = \cfrac{e_1}{z} = \cfrac{q_2}{1} = \dots$$

die Funktion  $f(z)$  darstellt, sind diese  $q_k, e_k$  gerade die gesuchten Anfangswerte  $q_k^{(0)}, e_k^{(0)}$ , wie ein Vergleich mit (2) zeigt.

*Beispiel:* Bestimmung der Pole von

$$\frac{z^2 + 3z + 1}{z^3 - 9z^2 - 8z + 2}.$$

Wir erhalten nach (5), wenn man mit sechs wesentlichen Stellen rechnet (ausgehend von  $N_3^* = z^3 - 9z^2 - 8z + 2$ ;  $N_1 = z^2 + 3z + 1$ ):

$q_1 N_1^* = 12z^2 + 9z - 2$ ;	also $q_1 = 12$	$N_1^* = z^2 + 0,75z - 0,166667$
$e_1 N_2 = -2,25z - 1,16667$	also $e_1 = -2,25$	$N_2 = z + 0,518519$
$q_2 N_2^* = -0,231481z + 0,166667$	also $q_2 = -0,231481$	$N_2^* = z - 0,720003$
$e_2 N_3 = -1,23852$	$e_2 = -1,23852$	$N_3 \equiv 1$
$q_3 N_3^* = 0,720003$	$q_3 = 0,720003$	$N_3^* \equiv 1.$

Damit kann das QD-Schema nach (4) aufgebaut werden. (Die  $s_v$  werden für diesen Zweck gar nicht gebraucht und sind darum weggelassen):

$v$	$q_1^{(v)}$	$e_1^{(v)}$	$q_2^{(v)}$	$e_2^{(v)}$	$q_3^{(v)}$	$(e_3^{(v)})$
↓	12					
		-2,25				
	9,75		-0,231481			
		0,0534187		-1,23852		
	9,80342		-1,52342		0,720003	
		-0,0083011		0,585353		0
	9,79512		-0,929766		0,134650	
		0,0007880		-0,0847716		0
	9,79591		-1,01533		0,219422	
		-0,0000816		0,0183199		0
	9,79583		-0,996928		0,201102	
		+0,0000083		-0,0036955		0
	.	.	-1,00063		0,204798	
	.	.	.	0,0007563		0
	.	.	.	.	0,204012	
	.	.	.	.	.	0
	.	.	.	.	.	.



Das Beispiel zeigt, dass die numerische Instabilität beseitigt ist; die drei Kolonnen  $q_1^{(v)}$ ,  $q_2^{(v)}$ ,  $q_3^{(v)}$  konvergieren offensichtlich gegen die gesuchten Pole

$$\lambda_1 = 5 + \sqrt[3]{23} \approx 9,79583; \lambda_2 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 5 - \sqrt[3]{23} \approx 0,204168.$$

Für die Fälle, wo die Folgen der  $q_\sigma^{(v)}$  nicht genügend gut konvergieren, sind konvergenzverbessernde Massnahmen vorgesehen. Sie beruhen darauf, dass man auf die unendlichen Reihen in der aus (4) folgenden Beziehung

$$\lambda_\sigma = \lim_{v \rightarrow \infty} q_\sigma^{(v)} = q_\sigma^{(v)} + \sum_{\kappa=v}^{\infty} e_\sigma^{(\kappa)} - \sum_{\kappa=v+1}^{\infty} e_{\sigma-1}^{(\kappa)} \quad (6)$$

die Methoden von § 3 anwendet.

Wenn die zu lösende Gleichung *konjugiert komplexe Wurzeln* hat, so zeigt sich dies durch ein Oszillieren gewisser  $q$ -Werte an, genauer: Wenn

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_{k-1}| = |\lambda_k| > |\lambda_{k+1}| > \dots,$$

so konvergieren zwar die Kolonnen  $q_\sigma^{(v)}$  für  $\sigma \neq k-1, k$  nach wie vor gegen Wurzeln der Gleichung, aber die Quotienten  $q_{k-1}^{(v)}$  und  $q_k^{(v)}$  oszillieren, und insbesondere konvergiert  $e_{k-1}^{(v)}$  für  $v \rightarrow \infty$  nicht gegen Null. Trotzdem finden wir in I, Satz 4, und insbesondere in Folgerung 2 ein Mittel zur Bestimmung der konjugiert komplexen Wurzeln  $\lambda_{k-1}$  und  $\lambda_k$  (man setze dort  $m = k-2$  und  $n = k$ ):

*Man bilde die Polynome*

$$\hat{p}_k^{(v)}(z) = z^2 - [q_{k-1}^{(v+1)} + q_k^{(v)}]z + q_k^{(v)} q_{k-1}^{(v)}, \quad (6a)$$

die für  $v \rightarrow \infty$  gegen  $(z - \lambda_{k-1})(z - \lambda_k)$  konvergieren.

*Beispiel:* Auflösung der Gleichung  $z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 1$  durch Bestimmung der Pole von  $z^3/(z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 1)$ . Der S-Kettenbruch dieser Funktion wurde nach (5) bestimmt und lautet:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{4}{1} + \frac{1,25}{z} - \frac{0,45}{1} + \frac{0,977778}{z} - \frac{1,41414}{1} \\ + \frac{0,0292207}{z} - \frac{0,392857}{1}.$$

Damit lässt sich das QD-Schema aufbauen (in komprimierter Form und ohne die  $s_1^{(v)}$ ):

$\nu$	$q_1^{(\nu)}$	$e_1^{(\nu)}$	$q_2^{(\nu)}$	$e_2^{(\nu)}$	$q_3^{(\nu)}$	$e_3^{(\nu)}$	$q_4^{(\nu)}$
4							
		-1,25					
	2,75		0,45				
		-0,204 545		-0,977 778			
	2,545 45		-0,323 232		1,414 14		
		0,025 974 0		4,277 78		-0,029 220 7	
	2,571 43		3,928 57		-2,892 86		0,392 857
		0,039 682 5		-3,150 00		0,003 968 2	
	2,611 11		0,738 889		0,261 111		0,388 889
		0,011 229 3		-1,113 16		0,005 910 2	
	2,622 34		-0,385 496		1,380 18		0,382 979
		-0,001 650 8		3,985 39		0,001 640 0	
			3,601 54		-2,603 57		0,381 339
				-2,881 06		-0,000 240 2	
					0,277 730		0,381 579
						-0,000 330 0	
	$\lambda_1$	0	komplexes Wurzelpaar ?			0	0,381 909
						$\lambda_4$	

Da  $q_2^{(v)}$  und  $q_3^{(v)}$  nicht zu konvergieren scheinen, bilden wir nach (6a) die Polynome  $\hat{p}_k^{(v)}$  (mit  $k = 3$ ):

$$\hat{p}_3^{(0)} = z^2 - 1,09091z + 0,636364,$$

$$\hat{p}_3^{(1)} = z^2 - 1,03571 z + 0,935065,$$

$$\hat{p}_3^{(2)} = z^2 - z + 1,02579,$$

$$\hat{p}_3^{(3)} = z^2 - 0,99468 z + 1,01980,$$

$$\hat{p}_3^{(4)} = z^2 - 0,99797z + 1,00367,$$

.....

Diese konvergieren für  $\nu \rightarrow \infty$  offenbar gegen  $z^2 - z + 1$ , welches in der Tat ein Teiler von  $z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 1$  ist; die zugehörigen Wurzeln sind

$$\lambda_{2,3} = (1 \pm i\sqrt{3})/2.$$

## 7. Quadratische Konvergenz des QD-Algorithmus

Man kann die in § 5 behandelte progressive Form des QD-Algorithmus auch als eine Methode zur Berechnung der  $S$ -Kettenbrüche für die in I, § 5, definierten Funktionen

$$f_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_{\nu+n}}{z^{n+1}} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

aus dem  $S$ -Kettenbruch von  $f_0(z) = f(z)$  auffassen. Wir wollen nun auch noch

die  $J$ -Kettenbrüche dieser Funktionen in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen, wobei wir der Einfachheit halber den  $S$ - (bzw.  $J$ -) Kettenbruch der Funktion  $f_v(z)$  mit  $S_v$  (bzw.  $J_v$ ) bezeichnen. Auf diese Weise wird die Konvergenz des QD-Algorithmus wesentlich beschleunigt werden können.

Man kann nämlich die Formeln (4), die dem progressiven QD-Algorithmus zugrunde liegen, offenbar in zwei Formelgruppen aufspalten:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\sigma^{(v+1)} &= q_\sigma^{(v)} + e_\sigma^{(v)} \\ \beta_\sigma^{(v+1)} &= q_{\sigma+1}^{(v)} e_\sigma^{(v)} \end{aligned} \right\} \text{ für } \sigma = 1, 2, \dots, n, \text{ mit } e_n^{(v)} = 0; \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} q_\sigma^{(v+1)} &= \alpha_\sigma^{(v+1)} - e_{\sigma-1}^{(v+1)} \\ e_\sigma^{(v+1)} &= \frac{\beta_\sigma^{(v+1)}}{q_\sigma^{(v+1)}} \end{aligned} \right\} \text{ für } \sigma = 1, 2, \dots, n, \text{ mit } e_0^{v+1} = \beta_n^{v+1} = 0. \quad (8)$$

Wie die Ausführungen von I, § 5, zeigen<sup>1)</sup>, sind die hier auftretenden  $\alpha_\sigma^{(v+1)}, \beta_\sigma^{(v+1)}$  tatsächlich die Elemente des  $J$ -Kettenbruchs  $J_{v+1}$ , der demnach als Zwischenglied der Berechnung von  $S_{v+1}$  aus  $S_v$  erscheint.

Man kann nun mit Vorteil benützen, dass bei einer als  $J$ -Kettenbruch gegebenen Funktion die Verschiebung des Koordinatennullpunktes eine triviale Operation ist, man muss nur zu jedem  $\alpha_\sigma$  dieselbe Konstante addieren, denn es ist ja

$$\frac{c}{z - \alpha_1} - \frac{\beta_1}{z - \alpha_2} - \frac{\beta_2}{z - \alpha_3} - \dots \equiv \frac{c}{z^* - \alpha_1^*} - \frac{\beta_1}{z^* - \alpha_2^*} - \frac{\beta_2}{z^* - \alpha_3^*} - \dots,$$

wenn  $z = z^* + t$ ,  $\alpha_\sigma = \alpha_\sigma^* + t$ .

Es ist nun zweckmässig, im Zwischenschritt, das heisst unmittelbar nach der Berechnung der  $\alpha_\sigma^{(v+1)}$  und  $\beta_\sigma^{(v+1)}$ , den Nullpunkt der  $z$ -Ebene in die Nähe eines Pols von  $f(z)$  zu verschieben (wir bezeichnen diesen Pol fortan mit  $\lambda_n$ ). Unter geeigneten Umständen wird der Absolutbetrag dieses Pols im neuen Koordinatensystem wesentlich kleiner sein als bei den andern Polen. Das wird nach den Ausführungen des Beweises von Satz 3 in der Arbeit I zur Folge haben, dass die  $e_{n-1}^{(v)}$  im weiteren Verlauf der Rechnung wesentlich rascher gegen 0 konvergieren. Das hat wiederum zur Folge, dass man bessere Näherungswerte für  $\lambda_n$  erhält, die man für weitere Koordinatenverschiebungen benützen kann, so dass die Konvergenz immer schneller wird.

Führt man bei jedem Schritt der obigen Rechenvorschrift eine solche Koordinatenverschiebung aus und wird jeweils  $q_n^{(v)}$  als Näherungswert für  $\lambda_n$  im betreffenden Koordinatensystem gewählt, so ergibt sich (nachdem man die

<sup>1)</sup> Man beachte insbesondere den Kettenbruch

$$f_v(z) = \frac{s_v}{z} \left[ 1 + \frac{q_1^{(v)}}{z - q_1^{(v)} - e_1^{(v)}} - \frac{e_1^{(v)} q_2^{(v)}}{z - q_2^{(v)} - e_2^{(v)}} - \frac{e_2^{(v)} q_3^{(v)}}{z - q_3^{(v)} - e_3^{(v)}} - \dots \right] \left( = \frac{s_v}{z} + \frac{f_{v+1}(z)}{z} \right).$$

$\alpha_{\sigma}^{(v+1)}$  und  $\beta_{\sigma}^{(v+1)}$  wieder eliminiert hat) die folgende Rechenvorschrift für die Berechnung der Nullstellen eines Polynoms  $N(z)$ :

1. Zuerst wird wie in § 6 eine rationale Funktion  $N_1(z)/N(z)$  konstruiert und sogleich in einen S-Kettenbruch entwickelt.
2. Ausgehend von den Elementen  $q_{\sigma}^{(0)}$ ,  $e_{\sigma}^{(0)}$  dieses Kettenbruchs und mit  $t_0 = 0$ , berechne man nacheinander für  $v = 0, 1, 2, \dots$

$$\left. \begin{aligned} t_{v+1} &= t_v + q_n^{(v)}, \\ q_{\sigma}^{(v+1)} &= q_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} - e_{\sigma-1}^{(v+1)} - q_n^{(v)}, \\ e_{\sigma}^{(v+1)} &= \frac{q_{\sigma+1}^{(v)} e_{\sigma}^{(v)}}{q_{\sigma}^{(v+1)}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für } \sigma = 1, 2, \dots, n \\ \text{mit } e_0^{(v+1)} = e_n^{(v)} = 0. \end{array} \quad (9)$$

Dann konvergieren die  $e_{\sigma}^{(v)}$  gegen 0 und die Größen  $t_v + q_{\sigma}^{(v)}$  gegen die gesuchten Nullstellen von  $N(z)$ , und zwar konvergieren  $e_{n-1}^{(v)}$  und  $t_v + q_n^{(v)}$  quadratisch gegen 0 bzw.  $\lambda_n$ .

Sobald  $e_{n-1}^{(v)}$  hinreichend klein geworden ist, lässt man  $q_n^{(v)}$  und  $e_{n-1}^{(v)}$  weg und führt die Rechenvorschrift mit  $n-1$  an Stelle von  $n$  weiter. Auf diese Weise erhält man auch  $\lambda_{n-1}$  mit quadratischer Konvergenz usw. Die Praxis zeigt, dass die Berechnung von  $\lambda_n$  relativ lange dauert, während dann die übrigen  $\lambda_{\sigma}$  rasch nacheinander erhalten werden. Wenn auch allfällige komplexe Wurzeln mit quadratischer Konvergenz erhalten werden sollen, so muss man auch komplexe Koordinatenverschiebungen ausführen.

*Numerisches Beispiel.* Wir bestimmen wie in § 6 die Nullstellen von  $z^3 - 9z^2 - 8z + 2$  als Pole der rationalen Funktion

$$\frac{z^2 + 3z + 1}{z^3 - 9z^2 - 8z + 2}.$$

Der S-Kettenbruch lautet hier nach § 6:

$$f(z) = \cfrac{1}{z} - \cfrac{12}{1} + \cfrac{2.25}{z} + \cfrac{0.231481}{1} + \cfrac{1.23852}{z} - \cfrac{0.720003}{1}.$$

Damit ergibt die Rechenvorschrift (9) bei sechsstelliger Rechnung:

$v$	$q_1^{(v)}$	$e_1^{(v)}$	$q_2^{(v)}$	$e_2^{(v)}$	$q_3^{(v)}$	$t_v$
0	12	-2.25	-0.231481	-1.23852	0.720003	0
1	9.03000	0.057678	-2.24768	0.396735	-0.396735	0.720003
2	9.48441	-0.013669	-1.44054	0.109264	-0.109264	0.323268
3	9.58005	0.002055	-1.22407	0.009753	-0.009753	0.214004
4	9.59181	-0.000262	-1.20430	0.000079	-0.000079	0.204251
5	9.59163	0.000033	-1.20417	0	0	0.204172
6	10.7958	-0.000004	0.000004			-0.999998
7	10.7958	0	0			-0.999995
8	0					9.79580

Die unterstrichenen Werte sind die gesuchten Nullstellen. Die Abweichungen von den wahren Werten sind auf Aufrundungsfehler zurückzuführen, insbesondere auch auf solche während der Berechnung des  $S$ -Kettenbruches (man beachte zum Beispiel den ungenauen Anfangswert  $q_3^0 = 0,720003$  an Stelle von  $0,720000$ ).

Das Literaturverzeichnis befindet sich am Schlusse der Arbeit I (H. RUTISHAUSER, *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, ZAMP 5, 233 [1954]).

### Summary

The present paper gives several applications of the quotient-difference (= QD)-algorithm [see ZAMP 5, 233 (1954)]. These include the summation of infinite series with the aid of continued fractions and the solution of algebraic equations. For the latter, a slight modification of the QD-algorithm is developed in § 5.

(Eingegangen: 18. September 1953.)

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

### Ein Impulsgenerator mit Sekundäremissionsröhren

VON ERNST BALDINGER und MARC NICOLET, Basel<sup>1)</sup>

Der Entwurf dieses Apparates wurde durch eine Arbeit von F. H. WELLS<sup>2)</sup> angeregt. Der Apparat erzeugt Rechteckimpulse einstellbarer Dauer sowie Spannungen zur Zeitablenkung und zur Hellsteuerung eines Oszillographen und wird zur Kontrolle und zur Messung der charakteristischen Eigenschaften von Breitbandverstärkern, Laufzeitketten usw. verwendet. Die grundsätzliche Anordnung ist dem Blockdiagramm (Figur 1) zu entnehmen.

Ein Kippgenerator  $G$  liefert eine Sägezahnspannung  $Z$  und einen Rechteckimpuls  $P$ , der – über die Kathodenstufe  $K$  – zur Hellsteuerung der Kathodenstrahlröhre dient. Der Impuls  $P$  steuert ebenfalls die Schaltung  $J$ , in welcher der Testimpuls  $S$  erzeugt wird. Das  $RC$ -Glied  $V$  gestattet, diesen Testimpuls innerhalb der Zeit  $T_1$  zu verschieben. Die Ausgangsstufe  $A$  liefert sowohl positive als auch negative Impulse einstellbarer Grösse.

Die Impulse  $P$  und  $S$  werden mit einer Kippschaltung erzeugt, die als Grundelement eine Sekundäremissionspentode verwendet. Ihr Vorteil besteht darin, dass infolge der gleichzeitigen Anwesenheit von positiven und negativen Signalen alle impulsartig gesteuerten Röhren mit Ruhestrom Null betrieben werden können. Infolgedessen lassen sich überall grosse Momentanwerte der Ströme und somit kurze Anstiegszeiten der Impulse erreichen. Das Prinzip der verwendeten Kippschaltung ist in Figur 2 dargestellt. Im Gegensatz zu üblichen Röhren führt

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität Basel, Abteilung für angewandte Physik.

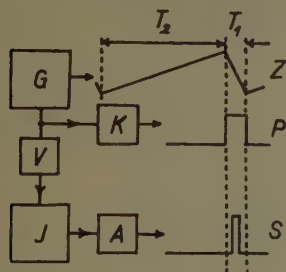
<sup>2)</sup> F. H. WELLS, *Nucleonics* 10, Nr. 4, 28 (1952). I. A. D. LEWIS und F. H. WELLS, *Milli-microsecond Pulse Techniques* (Pergamon Press, London 1954).



die Anode mehr Strom als die Kathode, weshalb die Schaltung zu Kippvorgängen fähig ist. Die Röhre kann, einmal in den leitenden Zustand übergegangen, auf verschiedene Arten wieder gesperrt werden:

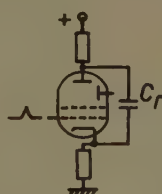
1. Durch die Entladung des Kondensators  $C_r$ ;
2. durch ein negatives Gittersignal, wie dies beim Generator  $G$  der Fall ist;
3. durch eine in die Anode eingeführte, am Ende kurzgeschlossene Laufzeitkette, deren Reflexsignal die Kathode wieder über das Gitterpotential hebt und so die Impulsdauer bestimmt. Nach diesem Prinzip arbeitet der Generator  $J$ , der den Testimpuls  $S$  erzeugt.

Um einer Überlastung der Sekundäremissionsröhren vorzubeugen, ist das Verhältnis  $T_1 : T_2$  in Figur 1 mit 1 : 100 fest vorgeschrieben. Man erreicht dies durch



Figur 1

Blockdiagramm.



Figur 2

Prinzip einer Kipperschaltung mit Sekundäremissionsröhre.

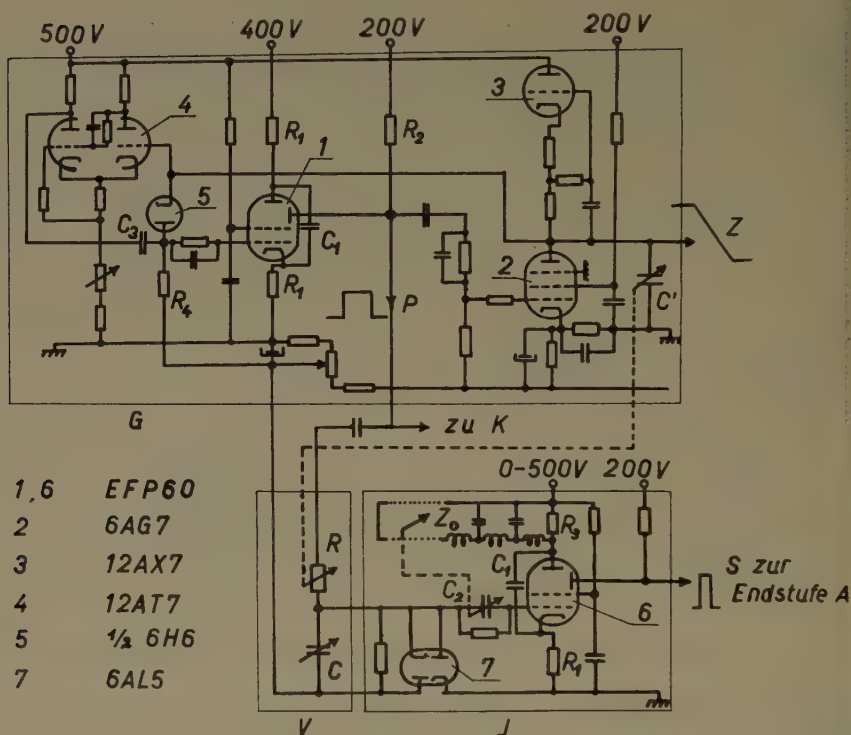
die in Figur 3 wiedergegebene Anordnung. Führt nämlich die Röhre 1 Strom, so wird der Kondensator  $C'$  durch die Pentode 2 angenähert linear entladen. Dieser Vorgang hört auf, wenn die Rückführdiode 5 zu leiten beginnt, wodurch beide Röhren gesperrt werden. Über die Triode 3 wird nun  $C'$  mit einem rund hundertmal kleineren Strom wieder aufgeladen. Sobald der Ansprechpegel der Schmitt-Schaltung  $4^1$  überschritten wird, führt diese dem Gitter der EFP60 (Röhre 1) ein positives Signal zu, wodurch die Entladung des Kondensators  $C'$  von neuem beginnt. Die für den ganzen Zyklus benötigte Zeit hängt vom Werte von  $C'$  ab. Um eine möglichst lineare Entladung des Kondensators  $C'$  zu gewährleisten, ist es zweckmässig, dem Bremsgitter der Röhre 2 ein gegenüber der Kathode positives Potential von  $\approx 50$  V zu erteilen. Diese Massnahme verbessert die  $Ja-U_a$ -Kennlinie der Pentode und erhöht insbesondere bei kleinen Anodenspannungen ihren Innenwiderstand<sup>2)</sup>.

Das Signal  $P$  wird nun einerseits der Kathodenstufe  $K$  (Hellsteuerung), andererseits einem  $RC$ -Glied zugeführt und so aus dem Rechteckimpuls eine exponentiell ansteigende Kurve erzeugt. Ihr Schnittpunkt mit dem Ansprechpegel von  $J$  bestimmt den Zeitpunkt des Einsatzes des Testimpulses in  $J$ . Der Drehkondensator  $C$  gestattet, diesen Punkt innerhalb von  $T_1$  zu verschieben.

Durch Änderung der Gliederzahl der Laufzeitkette in der Kipperschaltung  $J$  lässt sich die Dauer des Testimpulses zwischen zirka  $10^{-7}$  und  $127 \cdot 10^{-7}$  s ver-

<sup>1)</sup> Vgl. zum Beispiel W. C. ELMORE und H. SANDS, *Electronics* (McGraw-Hill, New York, 1949), S. 100.

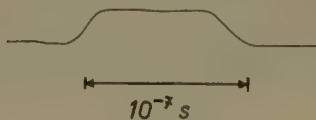
<sup>2)</sup> Vgl. zum Beispiel K. R. SPANGENBERG, *Vacuum Tubes* (McGraw-Hill, New York, 1948), S. 272.



$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 800 \Omega$ ,  $R_3 = 490 \Omega$ ,  $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R = 5 - 160 \text{ k}\Omega$ ,  $Z_0 = 330 \Omega$ ,  
 $C_1 = 0,5 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 100 \text{ pF} - \infty$ ,  $C_3 = 200 \text{ pF}$ ,  $C = 5 - 550 \text{ pF}$ ,  
 $C' = \text{Schaltkapazität} - 6000 \text{ pF}$

Figur 3

Schaltschema der Teile G, V und J von Figur 1.



Figur 4

Testimpuls von  $10^{-7} \text{ s}$  Dauer.

ändern. Figur 4 zeigt den kürzesten Impuls von  $10^{-7} \text{ s}$  Dauer, aufgenommen auf dem Philips-Oszillographen Typ GM5653/02 in Kombination mit der raschesten Zeitablenkung des Impulsgenerators.

Testimpuls und Zeitablenkspannung werden direkt den Ablenkplatten der Kathodenstrahlröhre zugeführt. Die Ausgangsstufe A in Figur 1 – ebenfalls eine EFP60 – liefert im günstigsten Falle einen Impulsstrom von  $\approx 0,28 \text{ A}$  oder eine maximale Impulsspannung von  $\approx 400 \text{ V}$ . Zum Philips-Oszillographen sei noch

bemerkt, dass die Verdrahtung zu den Ablenkplatten der Braunschen Röhre abgeändert werden muss, da sonst störende, hochfrequente Schwingungen auftreten<sup>1)</sup>.

Zur Beobachtung rasch ablaufender Vorgänge wird der Abfall ( $T_1$ , Figur 1), für langsam ablaufende Vorgänge der Anstieg ( $T_2$ , Figur 1) der Sägezahnspannung verwendet. Die Repetitionsfrequenz ist einstellbar zwischen  $5 \cdot 10^4$  und  $10^3$  Hz, was einer Variation der Schreibgeschwindigkeit von  $5 \cdot 10^7$  bis  $10^4$  cm/s entspricht.

### Summary

A pulse generator employing secondary emission valves is described. The generator produces positive and negative output pulses with adjustable pulse duration from  $10^{-7}$  to  $10^{-5}$  s and a rise time of about  $1,3 \cdot 10^{-8}$  s. In addition to these test-pulses, signals for the beam brightening and the sweep of a cathode-ray oscillograph are generated, permitting the study of high-speed transients with an ordinary oscilloscope.

(Eingegangen: 13. Juli 1954.)

## On Rotational Viscous Flow Through a Tube<sup>2)</sup>

By PETER HENRICI, Washington, D.C.<sup>3)</sup>

### 1. Introduction

In a recent paper [3]<sup>4)</sup>, L. COLLATZ and H. GÖRTLER consider the stationary, slightly rotational, axisymmetric flow of a viscous fluid through a straight circular tube at moderate or high Reynolds numbers. It is shown that after some simplification this problem can be reduced to the following eigenvalue problem for a function  $G(s)$  proportional to the angular velocity component:

$$s^2 G'' + s G' - G = \lambda s^2 (1 - s^2) G, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (1a)$$

$$G(0) = G(1) = 0. \quad (1b)$$

With the aid of the eigenfunctions of this problem the rotation in the tube can be computed for any given initial rotation. Furthermore, the  $n$ -th eigenvalue of (1) measures the exponential decay of the corresponding component of rotation in the direction of the flow.

The first five eigenvalues and eigenfunctions of (1) are computed in [3] by numerical methods, and a crude approximation for the large eigenvalues is given. In the present note we supplement these results by asymptotic expressions for the large eigenvalues and the corresponding eigenfunctions. It turns out that in

<sup>1)</sup> Die tiefste Eigenresonanz der abgeänderten Zuleitungen (inklusive der Kapazität der Ablenkplatten) liegt bei 80 MHz. Der aperiodische Grenzwiderstand beträgt  $\sim 150 \Omega$ . Mit einer Verdrahtungskapazität von  $\sim 20$  pF entspricht dies einer Anstiegszeit von  $\sim 0,5 \cdot 10^{-8}$  s.

<sup>2)</sup> This paper was prepared under a National Bureau of Standards contract with American University and was supported by the Office of Naval Research.

<sup>3)</sup> American University.

<sup>4)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 516.

particular for the large eigenvalues we are thus able to get much better approximations than those obtained in [3]. We also indicate an alternative method for the computation of the low eigenvalues. – The physical conclusions of [3] are not affected by our results.

## 2. Analytical Solution of the Eigenvalue Problem

In the following we put

$$\lambda = -16 \beta^2. \quad (2)$$

It is easy to verify that the differential equation (1a) and the first of the boundary conditions (1b) are satisfied by the function

$$G(s) = 4 \beta s e^{-2\beta s^2} {}_1F_1(1 - \beta; 2; 4 \beta s^2), \quad (3)$$

$$= s^{-1} M_{\beta, 1/2}(4 \beta s^2), \quad (4)$$

where the symbols  ${}_1F_1$  and  $M$  denote the confluent hypergeometric series and the Whittaker function<sup>1)</sup> respectively. The eigenvalues of the problem can then be computed by (2) from the nonvanishing zeros of the function

$$f(\beta) = M_{\beta, 1/2}(4 \beta). \quad (5)$$

Taking for granted from [3] that the eigenvalues are all negative, we can confine our search for these zeros to real and, since<sup>2)</sup>

$$f(-\beta) = -f(\beta),$$

to positive values of  $\beta$ .

## 3. Integral Representation for $G(s)$

The last factor on the right of (3) is, as is easily seen, equal to the coefficient of  $z^{-1}$  in the Laurent expansion at  $z = \infty$  of the function

$$\frac{1}{\beta} e^{4\beta s^2 z} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^\beta,$$

which in the  $z$ -plane cut between  $z = 0$  and  $z = 1$  is univalued and regular except at  $z = \infty$ . By the residue theorem we thus have

$$G(s) = \frac{2s}{\pi i} e^{-2\beta s^2} \int e^{4\beta s^2 z} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^\beta dz, \quad (6)$$

where the integral is to be extended along an arbitrary simple contour encircling the mentioned cut clockwise. Setting

$$g(z) = 2s^2 - 4s^2 z - \log\left(1 - \frac{1}{z}\right) \quad (7)$$

we can also write

$$G(s) = \frac{2s}{\pi i} \int e^{-\beta g(z)} dz. \quad (8)$$

<sup>1)</sup> In WHITTAKER and WATSON's original notation; see E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed. (Cambridge University Press, London, 1927), p. 337.

<sup>2)</sup> *Modern Analysis*, p. 338.

#### 4. Large Eigenvalues

In order to obtain information about the eigenvalues, we consider first the case  $s = 1$ . In this case the integrand in (8) possesses the two (only seemingly coinciding) saddle points of the second order

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i0 \quad (9)$$

on the upper and the lower edge of the cut. At these points,

$$g = \mp i\pi, \quad g' = 0, \quad g'' = 0, \quad g''' \neq 0.$$

Integrating along the appropriate lines of steepest descent originating from  $z_{1,2}$  by integrating from 0 to  $\infty$  with respect to the new variable

$$t = \frac{g(z) \pm i\pi}{2} = -\zeta - \frac{1}{2} \log \frac{1-\zeta}{1+\zeta}, \quad (\zeta = 2z - 1),$$

and defining the coefficients  $b_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) by

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m (3t)^{(m/3)-1} \\ (b_1 &= 1, \quad b_3 = -\frac{3}{5}, \quad b_5 = \frac{3}{35}, \quad \dots, \quad b_2 = b_4 = \dots = 0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

we obtain by a well-known lemma due to WATSON<sup>2)</sup> the following asymptotic expansion for the function  $f(\beta)$ <sup>3)</sup>, valid for  $|\arg \beta| \leq \pi - \delta$  with arbitrary  $\delta > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} f(\beta) \sim & \frac{4}{3\pi} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos \pi \left( \beta + \frac{m}{3} \right) \sin \frac{m\pi}{3} \Gamma\left(\frac{m}{3}\right) \left(\frac{3}{2\beta}\right)^{m/3} \\ & - \frac{2}{3\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{3}{2\beta}\right)^{1/3} \left\{ \sin \pi \left( \beta - \frac{1}{6} \right) \left[ 1 - \frac{3}{70} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{3}{2\beta}\right)^{4/3} + \dots \right] \right. \\ & \left. + \cos \pi \left( \beta - \frac{1}{6} \right) \left[ 0 + \frac{3^{3/2}}{70} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{3}{2\beta}\right)^{4/3} + \dots \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Using an argument similar to one put forward by WATSON<sup>4)</sup>, we can derive from (11) the first terms of an asymptotic expansion for the large zeros of  $f(\beta)$ <sup>5)</sup>. The

<sup>1)</sup> The branch of  $\zeta(t)$  which is real for positive  $t$  is to be considered here.

<sup>2)</sup> G. N. WATSON, *A Treatise on the Theorie of Bessel Functions*, 2nd ed. (Cambridge University Press, London, 1944), p. 236.

<sup>3)</sup> The first terms of this expansion can also be found in [1], p. 109. They are there in a form which is not very well suited to our purpose.

<sup>4)</sup> *Bessel Functions*, p. 503.

<sup>5)</sup> A similar expansion for the large zeros of  $M_{\beta,0}$  ( $4\beta$ ) has been given by LAUWERIER [4], also in connection with a problem of viscous flow.



result is as follows:

$$\beta_n = n + \frac{1}{6} + A_4 \frac{1}{\left(n + \frac{1}{6}\right)^{4/3}} + A_8 \frac{1}{\left(n + \frac{1}{6}\right)^{8/3}} + O \left[ \left(n + \frac{1}{6}\right)^{-10/3} \right], \quad (12)$$

where  $n$  is a larger integer and

$$A_4 = -\frac{3}{35} \cdot \frac{(3/2)^{1/3}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2} = -0.0136718, \quad A_8 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot A_4^2 = 0.0003390.$$

We do not prove that  $\beta_n$  approximates just the  $n$ -th zero of  $f(\beta)$ ; this should be clear, however, from the numerical results given below. Formula (12) should be contrasted with the approximation given in [3] for the large eigenvalues, which in the present notation amounts to

$$\beta_n \sim n.$$

### 5. Qualitative Behaviour of the Eigenfunctions

In order to discuss the asymptotic behaviour of the eigenfunctions, we assume in (8)  $0 < s < l$ . Putting

$$s = \cos \vartheta \quad \left(0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right),$$

we find that the saddle points lie now at

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm i \operatorname{tg} \vartheta}{2}$$

and are simple. Without further amplification we state the result of the saddle-point integration, which is in accordance with [1], p. 105:

$$G(s) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi \beta \sin 2 \vartheta}} \sin \left( \beta \left( \pi - 2 \vartheta + \sin 2 \vartheta \right) - \frac{\pi}{4} \right), \quad \left. \begin{array}{l} \\ \left( \varepsilon \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \beta \rightarrow \infty \right) \end{array} \right\} \quad (13)$$

This formula suggests that the relative maxima of  $|G(s)|$  are smallest near  $\vartheta = \pi$ , i.e.  $s = 2^{-1/2}$ , and increase from there on towards the endpoints of the considered interval. In this direction we prove the following

*Theorem.* Let  $\beta > 1/8$  and

$$s_j = \sqrt{\frac{1}{2}} + j \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16\beta^2}}, \quad (j = -1, 0, 1).$$

Then the sequence of the relative maxima of  $|G(s)|$  decreases in  $(s_{-1}, s_0)$  and increases in  $(s_0, s_1)$ .

*Proof.* Equation (1a) may be written in the selfadjoint form

$$(s G')' + \varphi(s) G = 0,$$

where

$$\varphi(s) = 16 \beta^2 s (1 - s^2) - \frac{1}{s}.$$

Since  $\varphi(s) > 0$  in  $(s_{-1}, s_1)$  and since  $s \varphi(s)$  is increasing in  $(s_{-1}, s_0)$  and decreasing in  $(s_0, s_1)$ , the assertion follows from a theorem due to SONINE and PÓLYA<sup>1)</sup>. – It will be noted that

$$s_{-1} \sim \frac{1}{4\beta} \quad \text{and} \quad s_1 \sim 1 - \frac{1}{32\beta^2}.$$

## 6. Low Eigenvalues

The eigenvalues of low order are computed in [3] as zeros of a series which is defined by a three-term recurrence relation. It follows from (3) that the corresponding values of  $\beta$  may also be determined as the zeros of the confluent hypergeometric series

$${}_1F_1(1 - \beta; 2; 4\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n, \quad (14)$$

the terms of which may be computed by the two-term relation

$$\gamma_0 = 1; \quad \gamma_n = 4\beta \frac{n - \beta}{n(n+1)} \gamma_{n-1}.$$

## 7. Numerical Results

The following is a table of the first few values of  $\beta_n$  as computed from the values of  $\lambda_n$  given in [3], computed by the asymptotic expansion (12) and computed exactly from the zeros of (14). The calculation of (14), from which the zeros were determined by the regula falsi, was performed on the National Bureau of Standards Eastern Automatic Computer (SEAC) with the aid of the standard subroutine (working with double precision) for the hypergeometric function described in [2]<sup>2)</sup>.

$n$	$\beta_n$		
	[3]	(12)	(14)
1	1.156025	1.155760	1.156025
2	2.1619	2.161833	2.161876
3	3.163	3.163742	3.163755
4	4.146	4.164635	4.164640
5	5.12	5.165140	5.165143

We have not computed an estimate for the remainder in (12) and are therefore unable to give bounds for the error involved in using the asymptotic formula<sup>3)</sup>. The close agreement already between the first exact eigenvalues and the values computed by the asymptotic formula should however be noted.

<sup>1)</sup> See SZEGÖ [5], p. 161, footnote.

<sup>2)</sup> It is a pleasure to acknowledge the able assistance of Mr. W. F. CAHILL in the performance of these computations.

<sup>3)</sup> In this respect also the argument leading to the estimate for the error of  $\lambda_1$  on p. 106 of [3] is not quite complete, because there is no indication how the lower bound  $-l_2$  of  $-\lambda_2$  was derived.

## REFERENCES

- [1] H. BUCHHOLZ, *Die konfluente hypergeometrische Funktion* (Springer, Berlin, Göttingen and Heidelberg, 1953).
- [2] W. F. CAHILL, *Programs for Computing the Hypergeometric Series*, Math. Tables and other Aids to Computation 8, 36–37 (1954).
- [3] L. COLLATZ and H. GÖRTLER, *Rohrströmung mit schwachem Drall*, Z. angew. Math. Phys. 5, 95–110 (1954).
- [4] H. A. LAUWERIER, *The Use of Confluent Hypergeometric Functions in Mathematical Physics and the Solution of an Eigenvalue Problem*, Appl. sci. Res. [A] 2, 184–204 (1949–51).
- [5] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium Public. 23, (New York, 1939).

## Zusammenfassung

Für die Eigenwerte und Eigenfunktionen eines Eigenwertproblems, auf das L. COLLATZ und H. GÖRTLER im Zusammenhang mit einer kürzlichen Untersuchung [3] über Rohrströmung mit schwachem Drall geführt worden sind, werden asymptotische Näherungsformeln angegeben, die insbesondere die höhern Eigenwerte mit grösserer Genauigkeit als in [3] zu berechnen gestatten. Auch zur Ermittlung der niedrigen Eigenwerte wird ein einfaches Verfahren vorgeschlagen. Die Ergebnisse werden numerisch mit denen von [3] verglichen.

(Received: June 10, 1954.)

---

 Varia – Miscellaneous – Divers
 

---

**Internationaler Mathematikerkongress in Amsterdam  
September 1954**

Der in Abständen von vier Jahren tagende Internationale Kongress für Mathematik war in diesem Jahr von den holländischen Mathematikern – speziell vom Präsidenten, Prof. SCHOUTEN, und dem Sekretär, Prof. KOKSMA – in hervorragender Weise organisiert worden. Er vereinigte die führenden Mathematiker der meisten europäischen Länder, der nord- und südamerikanischen Staaten, der USSR., Australiens und der Staaten des fernen Osten. In sieben parallel geführten Sektionen (Algebra und Arithmetik, Analysis, Geometrie, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Angewandte und numerische Mathematik, Grundlagen und Logik, Unterricht) wurden die wissenschaftlichen Mitteilungen entgegengenommen. Ausserdem waren verschiedene Gelehrte (worunter zwei Schweizer: ECKMANN und STIEFEL) von der Kongressleitung zu längeren Berichten über ihre Spezialgebiete eingeladen worden. An der Eröffnungssitzung sprach Prof. VON NEUMANN, Princeton, über *Ungelöste Probleme der Mathematik*, und Prof. WEYL übergab die sogenannte «Field-Medaille» an die beiden Mathematiker KODEIRA und SERRE. Diese Medaille wird an junge Mathematiker verliehen, die in den verflossenen vier Jahren besonders zur Entwicklung der Mathematik beigetragen haben.

In der Sektion für angewandte und numerische Mathematik traten vor allem die stürmischen Umwertungen zutage, welche der Einsatz der neueren mathema-

tischen Instrumente (elektronische Rechenmaschinen usw.) mit sich gebracht hat. Die einstündigen Hauptvorträge dieser Sektion waren:

Prof. VAN DANTZIG, Holland, über die mathematischen Probleme, welche durch die Überschwemmungskatastrophen des Jahres 1953 in Holland angeregt wurden.

GOLDSTEIN: *On Some Methods of Approximation in Fluid Mechanics.*

JESSEN: *Some Aspect of the Theory of Almost Periodic Functions.*

NEYMAN: *Current Problems of Mathematical Statistics.*

STIEFEL: *Recent Developments in Relaxation Techniques.*

TITCHMARSH: *Eigenfunction Problems Arising from Differential Equations.*

YOSIDA: *Semi-group Theory and the Integration Problem of Diffusion Equations.*

Halbstündige Vorträge hielten:

COLLATZ: *Fehlermassprinzipien in der praktischen Analysis.*

FICHERA: *Methods of Funktional Linear Analysis in Mathematical Physics.*

HESTENES: *Hilbert Space Methods in Calculus of Variations and Numerical Analysis.*

KAMPÉ DE FÉRIET: *Problèmes mathématiques posés par la mécanique statistique de la turbulence.*

RELLICH: *Halbbeschränkte Differentialoperatoren höherer Ordnung.*

STOCKER: *Recent Progress in the Theory of Surface Waves.*

Es ist eine grosse Ehre für die Schweiz, dass Prof. Dr. H. HOPF für die nächste Amtsperiode als Präsident der Internationalen Mathematischen Union gewählt wurde.

E. STIEFEL

---

### Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

---

**Einführung in die Physik**, Band I: *Mechanik, Hydromechanik und Thermodynamik*. Von P. FRAUENFELDER und P. HUBER (Ernst-Reinhardt-Verlag AG., Basel 1951). 492 S., 391 Abb.; sFr. 18.50.

Das vorliegende Buch ist nach dem Vorwort als Ergänzung zu Vorlesungen über Experimentalphysik gedacht. Dies erlaubt, grösstenteils auf die Beschreibung von Apparaten und Versuchen zu verzichten, und gibt dafür Gelegenheit zur Konzentration und zu einem systematischen Stoffaufbau. Ein solcher bedingt stets eine eindimensionale Ordnung der weiträumigen Stoffgebiete der Physik, wofür sich eine in jeder Hinsicht ideale Lösung wohl überhaupt nicht finden lässt.

Im Buche von FRAUENFELDER und HUBER werden in einem einleitenden Kapitel zunächst die Grundeinheiten von Länge, Zeit und Masse mit den Dimensionsbegriffen eingeführt. Daran schliesst sich eine kurze Darstellung der Vektoralgebra und der Fehlertheorie. Die Mechanik beginnt darauf mit der Statik der starren Körper unter Voranstellung der Newtonschen Prinzipien. Es folgen die Dynamik des Massenpunktes und der Systeme, die Elastizitätslehre und die Hydromechanik. Der zweite Teil des Buches ist der Thermodynamik gewidmet.

Beim Lesen spürt man die grosse Erfahrung der Verfasser in der Vermittlung von Lehrstoff. In wohlthuendem Gegensatz zu manchen andern Lehrbüchern wird auf Punkte, die erfahrungsgemäss den Studierenden Schwierigkeiten bieten, mit besonderer Sorgfalt eingegangen. Gut geraten in dieser Hinsicht sind vor allem einzelne Kapitel der Thermodynamik und der kinetischen Theorie der Wärme.

Wenn man auch gegen Einzelheiten Vorbehalte anbringen könnte – so etwa gegen die von den Verfassern getroffene Wahl der mechanischen Grundbegriffe –, so bedeutet das keine Einschränkung der Anerkennung des hohen Wertes des



Buches und der Klarheit und Exaktheit seiner Darstellung. Je mehr man sich darin vertieft, um so mehr überrascht die Fülle des Stoffes, die wohl selten in dieser konzentrierten und doch immer klar verständlichen Form geboten wird. Besonders wertvoll dürften für den mit dem Stoff weniger Vertrauten die zahlreichen ergänzenden Zahlenbeispiele sein, bei denen je nach dem Stoffgebiete alle drei heute üblichen Maßsysteme (CGS-, Giorgi- und technisches System) zur Anwendung gelangen.

Die Sprache des Buches ist die knappe, sachliche Sprache des Physikers. Die sehr zahlreichen, trefflich gezeichneten, meist schematischen Abbildungen stellen eine wertvolle Ergänzung dar. Drucktechnisch wirkt der Text dank der Verwendung verschiedener Typen sehr übersichtlich. Zu bedauern ist, dass für die Größenbezeichnung nicht konsequent kursive Buchstaben Verwendung fanden. Auch beanspruchen leider die zur Charakterisierung der Vektoren benützten Pfeile etwas viel Platz und bringen wegen des dadurch bedingten wechselnden Zeilenabstandes eine gewisse Unruhe in das Textbild.

Gemäss dem Vorwort ist das Buch für naturwissenschaftlich interessierte Studierende gedacht. Es vermag aber auch bedeutend höhere Ansprüche zu befriedigen und dürfte jedem, der sich mit physikalischen Fragen beschäftigt, ein wertvolles Hilfsmittel für ein vertieftes Eindringen sein. Man wird daher das Erscheinen des zweiten Bandes mit besonderer Spannung erwarten. *W. Hardmeier*

**Advances in Electronics.** Vol. IV, Edited by L. MARTON (Academic Press, New York, 1952). X + 344 pp., 118 figs.; \$7.80.

Über Ziel und Anlage der von L. MARTON herausgegebenen Sammlung «Advances in Electronics» haben wir bereits bei der Besprechung der früheren Bände dieser Bücherreihe berichtet. Der vorliegende vierte Band umfasst die folgenden Beiträge (welche diesmal bis auf einen aus amerikanischen Forschungsstätten stammen): H. S. W. MASSEY, *Electron Scattering in Solids*; G. A. MORTON, *The Scintillation Counter*; A. VAN DER ZIEL, *Fluctuation Phenomena*; C. V. L. SMITH, *Electronic Digital Computers*; J. S. DONAL, JR., *Modulation of Continuous-Wave Magnetrons*; W. E. FROMM, *The Magnetic Airborne Detector*; M. G. PAWLEY and W. E. TRIEST, *Multichannel Radio Telemetry*.

Was von den früheren Bänden Lobendes gesagt werden konnte, kann auch für Band IV wiederholt werden. Jedenfalls darf auch dieser Band auf das Interesse eines weiten Leserkreises zählen, bildet doch jeder einzelne der Beiträge eine ausgezeichnete Übersicht über das von ihm behandelte Gebiet. *A. A. Rusterholz*

**Sampling Techniques.** By W. C. COCHRAN (J. Wiley & Sons, New York, 1953), 330 pp.; \$6.50.

Dieses Buch gibt eine gute Darstellung der modernen Stichprobentheorie und -technik, wie sie hauptsächlich in den letzten zwanzig Jahren, unter wesentlicher Mitwirkung des Autors dieses Buches, entwickelt wurde. Es behandelt vor allem die technischen und praktischen Fragen, die sich bei der Anwendung statistischer Stichproben stellen, wie zum Beispiel: Wie gross soll die Stichprobe gewählt werden, und welche Schlüsse können aus ihr gezogen werden? Welche Sicherheit besitzen diese Schlüsse? Die Theorie wird stets an Hand praktischer Beispiele demonstriert; ferner enthält das Buch eine Fülle von Aufgaben.

Der Leser muss die wichtigsten Verteilungen, ihre zugehörigen Begriffe und statistischen Tests kennen, wenn er das Buch verstehen will. Es gibt allen denen eine vorzügliche Anleitung, die auf möglichst rationelle Art Statistiken anlegen und deren Resultat verwerten wollen. *W. Saxer*



ELEKTRONENMIKROSKOPE  
MIKROTOME  
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN  
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB · TÄUBER · ZÜRICH

*Neuerscheinung*

# **Schaltungstheorie und Messtechnik des Dezimeter- und Zentimeter- Wellengebietes**

von *Dr. Albert Weissflock*, Technischer Direktor der Sté. Techn. d'Application et de Recherche Electronique, Montrouge (Seine).

(Sammlung Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften, Physikalische Reihe, Band 1.)

Inhalt: Allgemeine kreisgeometrische Vierpoltheorie – Schaltungen mit homogenen Leitungen (Doppel- und Wellenleiter) und Messtechnik – Zusammengesetzte Schaltungsteile,  $(2n)$ -Pole mit  $n > 2$  (Verzweigungen, Richtungskoppler) und Frequenzabhängigkeit der Transformationseigenschaften (Resonatoren, Filter) – Anpassung.

Der erste Abschnitt gibt eine ausführliche Darstellung der Geometrie der linear gebrochenen Funktionen, die, angewandt auf die Vierpoltheorie, ein sehr nützliches mathematisches Werkzeug zur Lösung von Höchstfrequenzfragen bietet. Die weiteren Abschnitte behandeln dann speziellere Schaltungsteile, mit denen sich der Ingenieur befasst.

Bestellungen durch den Buchhandel

**VERLAG BIRKHÄUSER · BASEL**



*Clichés für Wissenschaftliche Arbeiten*  
*unsere Spezialität*

*Clichés*

SCHÜTZENMATTSTR. 31

**STEINER+CO**

BASEL